БАШКИРСКИЙ ИНСТИТУТ СОЦИАЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ФИЛИАЛ)
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ПРОФСОЮЗОВ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«АКАДЕМИЯ ТРУДА И СОЦИАЛЬНЫХ ОТНОШЕНИЙ»

А.И. Быстров

ПРАКТИКУМ ПО ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКЕ

Учебное пособие для студентов финансово-экономических специальностей

Уфа 2013

УДК 336(075.8)
ББК 62.26я73
П69

Печатается по решению
Учебно-методического совета
БИСТ (филиала) ОУП ВПО «АТиСО»
Протокол № 9 от 15.03.2013 г.

Быстров, А.И.

П69 Практикум по финансовой математике: учеб. пособие для студентов финансово-экономических специальностей / А.И. Быстров; БИСТ (филиал) ОУП ВПО «АТиСО». — Уфа: Изд-во БИСТ (филиала) ОУП ВПО «АТиСО», 2013. — 104 с.
ISBN 978-5-904354-29-9

Практикум по финансовой математике разработан в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования для студентов финансово-экономических специальностей.

Рассмотрены основные положения финансовой математики. Пособие включает основные разделы финансовой математики: наращение и дисконтирование с простыми и сложными процентами, потоки платежей, основные и производные финансовые инструменты, элементы финансового анализа. Показано соответствие расчетов по финансовым формулам и функциям из MS Excel. Отдельные материалы могут быть полезны аспирантам и преподавателям.

Рецензенты:
Гильмутдинов И.Р., кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры «Экономика, информатика и аудит» БИСТ;
Бакусова С.М., кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математики математического моделирования УГУЭС;
Ушаков В.В., кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математики математического моделирования УГУЭС

УДК 336(075.8)
ББК 62.26я73

ISBN 978-5-904354-29-9

ВВЕДЕНИЕ

Научно-технический прогресс дал развитие такой важной области экономики, как финансово-кредитные отношения. Многие новшества здесь прямо или косвенно связаны с компьютеризацией финансово-банковской деятельности. Внедрение этих новшеств невозможно без развития вычислительной техники и разработки приложений для кредитно-финансовых расчетов с использованием методов математического моделирования, методов статистики, теории вероятностей и других наук. Необходимость расчетов кредитной, страховой, инвестиционной деятельности увеличивается по мере развития банковской и рыночной системы в России, поэтому возникла потребность в специалистах этой области. Например, готовятся специалисты по страховой математике, владеющие теорией финансовых расчетов — актуарии. Это специалисты в области математической статистики и теории вероятности, профессионально занимающиеся расчетами тарифов, резервов и обязательств в страховой сфере. Одной из задач актуарной деятельности является разработка научно обоснованных методов исчисления тарифных ставок, платежей страхования, кредитования, ипотеки. Поэтому основы актуарной деятельности и финансовых расчетов необходимы будущим специалистам в области экономики и финансов.

Возможности компьютеризации и достижения в ряде областей знания (системный анализ, информатика, экспертные системы, статистическое моделирование, линейное и нелинейное программирование и прочее) позволили заметно осовременить как технологию финансово-банковского дела, так и применяемый в количественном финансовом анализе, аналитический аппарат. В связи со сказанным можно указать на заметное усовершенствование методик применительно к традиционным объектам финансового анализа. Примером может служить разработка системы показателей эффективности производственных инвестиций, внедряемых в практику в последнее десятилетие, создание аналитических характеристик для традиционных финансовых инструментов и их портфелей и др. Возникла возможность по-новому взглянуть на содержание финансово-кредитных операций и предложить клиентам новые виды услуг, выходящие за рамки традиционных. К таким новшествам, в частности, относятся новые инструменты денежно-кредитного рынка — опционы, свопы, лизинг соглашения о будущей процентной ставке и т. п. Внедрение указанных новшеств в практику сопровождалось развитием соответствующих методов количественного анализа.

Проверенные практикой методы этого анализа и составляют предмет ***финансовой математики*** (ФМ).

Количественный финансовый анализ предназначен для решения разнообразных задач. Эти задачи можно разделить на две большие группы: традиционные или «классические», и новые, нетрадиционные, постановка и интенсивная разработка которых наблюдается в последние два-три десятилетия. Разумеется, такое деление условно. То, что было новым словом, скажем, еще десять лет назад, часто оказывается рутинным сегодня и должно рассматриваться в ФМ.

Количественный финансовый анализ применяется как в условиях определенности, так и неопределенности. В первом случае предполагается, что данные для анализа заранее известны и фиксированы. Например, при выпуске обычных облигаций однозначно оговариваются все параметры — срок, купонная доходность, порядок выкупа. Анализ заметно усложняется, когда приходится учитывать неопределенность — динамику денежного рынка (уровень процентной ставки, колебания валютного курса и т. д.), поведение контрагента.

К ***основным задачам ФМ*** относятся:

- измерение конечных финансовых результатов операции (сделки, контракта) для каждой из участвующих сторон;
- разработка планов выполнения финансовых операций, в том числе планов погашения задолженности;
- измерение зависимости конечных результатов операции от основных ее параметров;
- определение допустимых критических значений этих параметров и расчет параметров эквивалентного (безубыточного) изменения первоначальных условий операции.

Финансовая математика представляет собой совокупность методов определения изменения стоимости денег, происходящего вследствие их движения в процессе воспроизводства. Со структурной точки зрения это стройная система математических моделей (аналитических формул и способов исчисления).

Объектом исследования финансовой математики являются финансовые операции, а также определенный круг методов вычислений, необходимость в которых возникает всякий раз, когда в условиях финансовой операции оговариваются конкретные значения трех видов параметров:

- стоимостные характеристики (оценки долга в любой его форме, финансовые вложения и результаты финансовой операции и т. п.);
- временные данные (длительность финансовой операции или даты ее начала и окончания, даты платежей, продолжительность периодов начисления или отсрочки платежей и т. д.);
- характеристики эффективности (доходности) финансовой операции (процентные и учетные ставки).

Особое внимание здесь обращается на фактор времени. Необходимость учета временного фактора вытекает из сущности финансирования и кредитования и выражается в принципе *неравноценности денег*, относящихся к разным моментам времени.

В последнее время созданы новые технологии, совершенствующие саму финансово-кредитную деятельность. Такие технологии, как правило, содержат в качестве одной из важных составляющих тот или иной метод ФМ. В качестве примера такого новшества нельзя не указать на экспертные системы. Экспертная система кратко может быть определена как автоматизированная система, способная имитировать мышление специалиста и принимать решение в определенной узкой деятельности человека.

В настоящем практикуме, предназначенном для студентов финансово-экономических специальностей, содержатся учебно-методические материалы, дающие основные понятия по расчету основных кредитно-финансовых операций, финансовых инструментов и количественному финансовому анализу. Структура учебного пособия предусматривает по каждому разделу следующее:

- основные понятия и определения;
- описание формул, их вывод и анализ;
- описание и анализ аналогичных финансовых расчетов по специальным финансовым функциям MS Excel;
- примеры выполнения расчетов по финансовым формулам и функциям MS Excel;
- задачи для самостоятельной работы
- контрольные вопросы.

Далее приводятся практические задания и общие требования для выполнения лабораторных работ на компьютере с использованием приложений MS Office 2007: MS Excel (для выполнения основных финансовых расчетов) и MS Word (для общего описания лабораторных работ).

В приложении даны основные обозначения, расчетные формулы, глоссарий и тесты для самоконтроля знаний.

РАЗДЕЛ 1.
ПРОЦЕНТНЫЕ СТАВКИ И ОСНОВНЫЕ ФИНАНСОВЫЕ ОПЕРАЦИИ

1.1. Разновидность процентных ставок

Более всего *финансовая математика* связана с анализом прибыльности инвестиционной деятельности. *Цель инвестиций* — увеличение благосостояния инвестора. Это увеличение называется доходом, а при выражении в процентах от стоимости инвестиций — ставкой дохода. Инвесторы приобретают активы, такие, как акции компаний, облигации или недвижимость, в надежде получить доход либо от продажи их по более высокой цене, либо в виде дивидендов, процентов по купонам или рентных платежей. Кредиторы ссужают деньги в надежде получить доход в виде процентных платежей при полном погашении кредита заемщиком. Таким образом, кредиторы и инвесторы имеют общую цель — получить доход, или процент, как результат инвестиционной или кредиторской деятельности. Таким образом «***процент***» необходим при количественном финансовом анализе дохода от инвестиций или кредитования.

Процентные ставки — наиболее часто используемые финансовые показатели. В своей жизни многие берут кредит и платят проценты по этому кредиту, помещают деньги в банк или другое финансовое учреждение и получают за это процентные платежи. Существует большое разнообразие процентных ставок по кредитам и вкладам. Эти ставки отличаются не только по величине, но и по методу их расчетов. Процентные ставки могут быть фиксированы в течение всего периода действия договора, или могут изменяться на оговоренных условиях в определенные промежутки времени. Существуют и такие, например, по ипотечным ссудам, которые могут меняться по желанию кредитора.

Понятно, что проценты по кредитам и депозитам выплачиваются, как компенсация кредиторам или инвесторам за потерю потенциальной полезности денег для приобретения товаров и услуг вместо инвестирования. В этом и состоит важнейшая функция процента. Кроме того, одной из функций процента является компенсация этой потери выгоды, существующей из-за риска (*потери покупательной способности, невыполнения обязательств, возможной инфляции и других видов риска).* Эта потеря потенциальной полезности должна быть компенсирована — в этом и состоит важнейшая функция процента.

Из этого следует, что существует множество процентных ставок. Так как любое время на финансовых рынках существует ряд процентных ставок, то полезно разделить факторы, определяющие эти ставки, на ***две группы***: те, которые определяют общий уровень процентных ставок, и те, которые определяют различие процентных ставок.

Факторы, влияющие на уровень процентных ставок:

- политика правительства
- денежная масса
- ожидания относительно будущей инфляции.

Факторы, влияющие на различие процентных ставок:

- время до погашения финансовых обязательств
- риск невыполнения обязательств
- ликвидность финансовых обязательств
- налогообложение
- другие различные факторы, специфические для конкретных финансовых обязательств, например, предоставлено ли обеспечение активами, включены ли права выбора в договор.

Понятно, что влияния этих факторов на процентные ставки, соответствующие различным финансовым инструментам, разнообразны и изменяются каждый год.

1.2. Определение временной (текущей и будущей) стоимости денег

Временная стоимость денег имеет отношение к процессу определения текущей стоимости, т.е. сегодняшней стоимости суммы, обещанной в какой-либо момент в будущем, или к расчету будущей стоимости, т. е. стоимости суммы в будущем, полученной или уплаченной сегодня. Процесс определения текущей стоимости денег называется **дисконтированием,** а будущей — **наращением.**

Текущая стоимость находится путем дисконтирования каждого из потоков платежей на процент, который мог бы быть заработан, если бы эти средства были получены сегодня. Наиболее распространенное применение дисконтирования — это оценка облигаций путем дисконтирования будущих купонных платежей, а также оценка акций на основе использования модели дисконтирования дивидендов.

Финансовые активы оцениваются при помощи расчета текущей стоимости ожидаемых потоков платежей от этих активов. Некоторые финансовые инструменты, такие, как фьючерсы и форварды, оцениваются исходя из будущей стоимости денег. **Будущая стоимость находится наращением** всех процентных платежей, которые можно было бы получить на данную сумму до наступления определенного момента в будущем.

Далее проанализируем математические методы наращения и дисконтирования с использованием различных видов процентов.

1.3. Простые и сложные проценты

Тип применяемой в расчетах ставки — *простой* или *сложной* — зависит от вида конкретного финансового инструмента.

Простые проценты. Если ставка простая, то начисляемые проценты на депозит или по кредиту, рассчитываются как произведение процентной ставки, количества лет (или их соответствующих долей) до срока погашения и суммы вклада. Например, если 1000 у.е. разместить на 6 месяцев под 8 % годовых, то проценты, начисленные по простой ставке, будут равны:

$$0{,}08 \cdot 0{,}5 \cdot 1000 = 40.$$

Будущая стоимость депозита составит:

$$1000\,[1 + (0{,}08 \cdot 0{,}5)] = 1040.$$

Заметьте, как показаны 8 % в данной ситуации: 8 % — это 8/100, или 0,08, т. е. проценты выражаются в виде десятичной дроби, например, 8 % = 0,08, 10 % = 0,1 и т. д.

Таким образом, в общем виде формула для нахождения будущей стоимости по простой процентной ставке выглядит так:

$$S = P(1 + i_{п}n), \tag{1}$$

где S — будущая стоимость;
P — сумма основного долга;
n — срок вклада в годах;
$i_{п}$ — простая процентная ставка в долях единицы.

Обычно, если срок действия финансового инструмента больше одного года, то применяются сложные проценты. О них и пойдет далее речь.

Сложные проценты. Наращение по сложным процентам относится к периодическому добавлению накопленных процентов к основной сумме долга, т. е. накопленные проценты добавляются к основной сумме, увеличивая тем самым ее размер. Проценты в дальнейшем начисляются уже на эту увеличенную сумму. Например, денежная сумма в размере 1000 единиц помещается на банковский депозит сроком на 3 года с годовой процентной ставкой 6 % и ежегодным начислением процентов. В конце первого года 60 единиц, т. е. (1000 · 0,06), будет добавлено к первоначальному взносу, который возрастет до

1060 единиц. Это можно определить и так: 1000 · 1,06 = 1060. В течение второго года проценты будут начисляться уже на 1060 единиц. В конце второго года 63,6 (1060 · 0,06) будет добавлено к 1060, таким образом, в третьем году базой для начисления процентов будет сумма 1123,6, т. е. (1000 · 1,06 · 1,06), и т. д. Стоимость денег, помещенных на депозит, через 3 года (будущая стоимость первоначальной суммы) рассчитывается так: 1000 · 1,06 · 1,06 · 1,06 = 1191,02.

Это пример роста в геометрической прогрессии и записывается следующим образом: 1000(1,06)3 = 1191,016.

Общая формула для расчета будущей стоимости денег при ежегодном начислении процентов выглядит так:

$$S = P(1 + i)^n, \tag{2}$$

где обозначения аналогичны (1).

Во многих финансовых операциях начисление происходит чаще, чем один раз в год. Например, процентные платежи могут добавляться к общей сумме депозита или кредита ежеквартально или ежемесячно. Будущая стоимость денег в этом случае будет выше, так как на проценты, начисляемые через более короткие промежутки времени, процентные платежи начисляются раньше.

Для получения формулы наращения, когда проценты начисляются чаще, чем раз в год, необходимо изменить выражение (2). Годовая процентная ставка делится на количество периодов начисления в году, а степень n умножается на количество периодов начисления в году:

$$P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn}. \tag{3}$$

где m — количество периодов начисления в году.

Следующий пример, в котором рассмотрено ежеквартальное начисление процентов в течение трех лет, проиллюстрирует использование этой формулы:

$$1000\left(1 + \frac{0{,}06}{4}\right)^{4\cdot 3} = 1000(1{,}015)^{12} = 1195{,}618.$$

Следует заметить, что переход от ежегодного к ежеквартальному начислению процентов влечет за собой увеличение будущей стоимости, или приносит дополнительную прибыль. В нашем случае разница составляет 4,602 за 3 года.

Можно прийти к ложному заключению, что с увеличением m (начисляя проценты чаще) происходит бесконечное увеличение значения будущей стоимости

$$P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}.$$

Однако это не так, причиной чего является множитель наращения

$$q=\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}. \tag{4}$$

который ограничен в росте по мере увеличения *m.* Таблица 1 демонстрирует это для случая, когда $i = 1$ и $n = 1$. Следует отметить, что так как $n = 1$, то $mn = m$ и поэтому n можно в этом примере проигнорировать.

Таблица 1

m	1	5	10	100	1000	10000	100000	1000000
q	2,00000	2,48832	2,59374	2,70481	2,71692	2,71815	2,71827	2,71828

Таким образом, при $m = 2$ мы имеем $q = (1 + 1)^1 = 2$. Увеличивая частоту начислений в году до 10, мы получаем множитель наращения 2,593, увеличивая m до 100, получаем множитель 2,70481, а при увеличении m до 1000 — 2,71692, и т. д. Важным является предел этого увеличения, выражающийся математической константой к которой стремится q при увеличении m, что видно из графика (рис. 1). Эта константа — иррациональное число, т. е. имеет бесконечное число знаков после запятой, поэтому она не может быть выражена десятичной дробью. Ее назвали экспонентой и обозначили e. Конечно, можно записать приближенное значение e, такое, как 2,71828182845904523536287, но даже это число не является абсолютно точным значением.

Можно обобщить эффект увеличения частоты начислений *(m),* заметив, что множитель наращения (4) стремится к e^{in} по мере увеличения *m,* т.е.

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}=e^{in}. \tag{4}$$

В пределе можно предположить, что начисления становятся настолько частыми, что проценты начисляются непрерывно, тем самым увеличивая основную сумму в экспоненциальной зависимости. Это известно как **непрерывное наращение.**

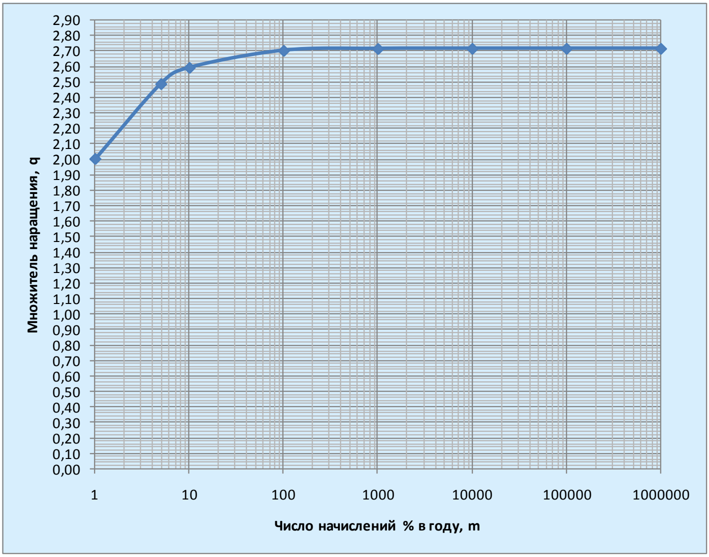


Рисунок 1 — Зависимость множителя наращения q от числа начислений в году при $i = 1$ и $n = 1$

Будущая стоимость денег при непрерывном наращении определяется как

$$\lim_{m\to\infty} S = P \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{nm} = Pe^{in},$$

или

$$S = Pe^{in}, \tag{5}$$

где P — текущая стоимость,
e — экспонента,
i — годовая процентная ставка,
n — количество лет или соответствующие доли лет.

Непрерывное наращение — это допущение, существующее только в теории и применяющееся в финансовых моделях, таких, как определение стоимости опционов или других финансовых инструментах.

Приведение дохода с дискретным наращением к эквивалентному доходу с непрерывным наращением. Приведение процентных ставок с различной частотой начисления к эквивалентным ставкам с непрерывным наращением позволяет сопоставить их между собой. Для преобразования доходов с дискретным наращением к доходам с непрерывным наращением необходимо, чтобы сумма денег, инвестированная под непрерывную процентную ставку, имела такую же будущую стоимость, что и подобная сумма, инвестированная под **эквивалентную** дискретную процентную ставку. Таким образом:

$$Pe^{i_{cc}n} = P\left(1 + \frac{i_{dc}}{m}\right)^{mn}, \tag{6}$$

где i_{cc} — непрерывная процентная ставка;
i_{dc} — эквивалентная дискретная процентная ставка;
n — общий срок (в годах);
m — количество периодов начисления в году.

Деля обе части уравнения на P и извлекая корень степени n, получим:

$$e^{i_{cc}} = \left(1 + \frac{i_{dc}}{m}\right)^{m}, \tag{7}$$

преобразовав это уравнение, имеем:

$$i_{cc} = m\ln\left(1 + \frac{i_{dc}}{m}\right), \tag{8}$$

где ln — знак натурального логарифма.

Заметим, что ln — функция, обратная экспоненциальной. Например, e = 2,71828... и ln(2,71828...) = 1, e^2 = 7,38905... и ln(7,38905...) = 2. Соответственно $e^{0,1}$ = 1,10517 и lnl,10517 = 0,1.

Следовательно, для получения процентной ставки с непрерывным наращением необходимо дискретную процентную ставку разделить на количество периодов начисления в году, прибавить 1, прологарифмировать полученный результат и умножить на количество периодов начисления в году.

Следующий пример проиллюстрирует использование формулы. Эквивалентная непрерывная процентная ставка, соответствующая ставке 6 % годовых с ежеквартальным начислением, равна:

$$i_{cc} = 4\ln\left(1 + \frac{0{,}06}{4}\right) = 4 \cdot 0{,}014889 = 0{,}059554 \approx 5{,}96\ \%.$$

Следует заметить, что процентная ставка с непрерывным наращением меньше процентной ставки с дискретным наращением, так как проценты начисляются чаще, и таким образом, сами проценты зарабатывают (или приносят) больше процентов.

Приведение доходов с непрерывным наращением к доходам с дискретным наращением. Мы можем получить эквивалентную дискретную процентную ставку, зная непрерывную процентную ставку, следующим образом:

$$i_{dc} = m\left(e^{i_{cc}/m} - 1\right). \qquad (9)$$

Значение экспоненты возводится в степень, равную отношению непрерывной процентной ставки к количеству периодов начисления в году при дискретном наращении. Из полученного результата вычитается единица и разность умножается на количество дискретных периодов начисления в году. В результате получаем эквивалентную ставку при дискретном наращении.

В качестве примера рассмотрим непрерывную процентную ставку 12,5 % годовых. Какая дискретная процентная ставка с начислением 4 раза в год эквивалентна данной?

$$i_{dc} = m\left(e^{0{,}125/m} - 1\right) = 4\left(e^{0{,}125/4} - 1\right) = 12{,}7\ \%.$$

Обратим внимание, что эквивалентная дискретная процентная ставка должна быть больше непрерывной эквивалентной ставки, так как при дискретном наращении проценты добавляются реже и, следовательно, на них в свою очередь начисляется меньше процентов.

Было отмечено выше, что сегодня стоимость некоторой суммы денег, обещанной в будущем, меньше, чем ее будущая стоимость. Даже в мире, характеризующемся отсутствием рисков, это условие по-прежнему будет выполняться, потому что денежные средства могли быть инвестированы по процентной ставке, свободной от риска. Поэтому будущая стоимость денег, инвестированных сегодня, будет больше стоимости этой же суммы, обещанной в будущем. В мире, в котором мы живем и который характерен наличием рисков, существует ряд неопределенностей, касающихся стоимости денег, обещанных в будущем, таких, как инфляция и невыполнение договорных обязательств.

Для сравнения стоимостей различных денежных потоков в разные периоды времени в будущем необходимо дисконтировать будущие потоки наличности и привести их к текущей стоимости. ***Текущая стоимость*** — это сумма, которая при инвестировании под существующую процентную ставку до определенной даты платежа имела бы стоимость, равную по величине сумме платежа, обещанного в этот момент в будущем.

Дискретное дисконтирование. Во многих финансовых операциях, даже краткосрочных, при дисконтировании используются сложные проценты. В этом случае для дисконтирования будущих денежных потоков и приведения их к текущей стоимости необходимо денежный поток разделить на дисконтный множитель (1 + ставка дисконтирования, выраженная в виде десятичной дроби) в степени, равной количеству лет до получения денежных средств. Это может быть представлено в следующем виде:

$$P = \frac{S}{(1+i)^n}, \tag{10}$$

где P — текущая стоимость будущего денежного потока;
S — величина будущего денежного потока;
i — ставка дисконтирования;
n — количество лет до поступления денежных средств.

На численном примере продемонстрируем использование формулы (10). Предположим, что 1000 единиц будет получено через 5 лет, и текущая рыночная ставка дисконтирования составляет 10 % годовых. Текущая стоимость в этом случае будет:

$$P = \frac{1000}{(1{,}1)^5} = 620{,}92 \text{ ед.}$$

Если дисконтирование происходит чаще, чем один раз в год, тогда r делится на количество периодов дисконтирования в году, а n умножается на количество периодов дисконтирования в году. Используя те же обозначения, что и в тексте о наращении, получим формулу:

$$P = \frac{S}{(1+i)^{mn}}, \tag{11}$$

Теперь рассмотрим приведенный выше пример, но изменим частоту дисконтирования до четырех раз в году:

$$P = \frac{1000}{\left(1+\frac{0{,}1}{4}\right)^{20}} = 610{,}27 \text{ ед.}$$

Таким образом, текущая стоимость данного денежного потока уменьшается с увеличением частоты дисконтирования при одной и той же процентной ставке.

Непрерывное дисконтирование. Так же, как и в случае с наращением, период между процессами дисконтирования может быть уменьшен до такой степени, что дисконтирование происходит непрерывно.

Формула для непрерывного дисконтирования выглядит так:

$$P{=}Se^{-in}, \tag{12}$$

т. е. при непрерывном дисконтировании е возводится в отрицательную степень — *in*. Например, текущая стоимость 1000 единиц, получаемая через 5 лет и при непрерывном дисконтировании в 10 % годовых, равна:

$$1000e^{(-0{,}1\cdot 5)} = 606{,}53 \text{ ед.}$$

1.4. Номинальная и эффективная ставки

Номинальная ставка. В современных условиях проценты начисляются, как правило, не один, а несколько раз в году — по полугодиям, кварталам и т. д. Некоторые зарубежные коммерческие банки практикуют даже ежедневное начисление процентов. При начислении процентов несколько раз в году можно воспользоваться формулой

$$S = P(1 + i)^n. \tag{13}$$

Параметр *n* в этих условиях будет означать число периодов начисления, а под ставкой *i* следует понимать ставку за соответствующий период.

Например, при поквартальном начислении процентов за 5 лет общее число периодов начисления составит 5 · 4 = 20. Множитель наращения по квартальной (сложной) ставке 8 % равен в этом случае $1{,}08^{20} = 4{,}6609$.

Пусть годовая ставка равна *j*, число периодов начисления в году — *m*. Каждый раз проценты начисляются по ставке *j/m*. Ставку *j* называют ***номинальной*** *(nominal rate)*. Формулу наращения теперь можно представить следующим образом:

$$S = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^N, \tag{14}$$

где *N* — общее количество периодов начисления.

Если N целое число *(N = nm),* то в большинстве случаев для определения величины множителя наращения можно пользоваться таблицами сложных процентов в учебниках или вычислить на компьютере. Например, при j = 20 % и поквартальном начислении процентов *(m* = 4) в течение 5 лет отыскиваем табличное значение множителя для i = 20/4 = 5 % и N = 5 · 4 = 20; находим q = 2,653298.

Пример 1.

Пусть проценты начисляются не раз в году, а поквартально (j = 15,5 %). В этом случае N = 20 и P = 1 000 000. Найдем S.

$$S = 1000000\left(1+\frac{0{,}155}{4}\right)^{20} = 2139049{,}01 \text{ руб.}$$

При ежегодном начислении процентов (13) мы получим S = 2 055 464,22.

Нетрудно догадаться, что *чем чаще начисляются проценты, тем быстрее идет процесс наращения*. Для иллюстрации сказанного приведем значения множителей для j = 20 % и n = 10 лет и разной частоте наращения в пределах года:

m	1	2	4	12	365
q	6,1917	6,7275	7,04	7,2682	7,385

Как следует из приведенных данных, наибольшую «прибавку» в наращении дает переход от ежегодного начисления процентов к полугодовому, наименьший эффект — переход от ежемесячного к ежедневному.

Пример 2.

Какова сумма долга через 25 месяцев, если его первоначальная величина 500 тыс. руб., проценты сложные, ставка 20 % годовых, начисление поквартальное?

По условиям задачи число периодов начисления $N = 25 : 3 = 8\,{}^{1}/_{3}$. Применим два метода наращения — общий и смешанный.

Смешанный метод наращения — это формула $S = P(1+i)^{a}(1+bi)$, где $n = a + b$ — срок ссуды, a — целое число лет, b — дробная часть года.
Получим

$$S = 500000\left(1+\frac{0{,}2}{4}\right)^{8{,}33} = 750840{,}04 \text{ руб.}$$

$$S = 500000\left(1+\frac{0,2}{4}\right)^{8} \times \left(1+\frac{1}{3}\times\frac{0,2}{4}\right) = 751039{,}85 \text{ руб.}$$

Эффективная ставка. Введем теперь новое понятие — *действительная,* или *эффективная ставка процента (effective rate).* Эта ставка измеряет тот реальный относительный доход, который получают в целом за год. Иначе говоря, эффективная ставка — это годовая ставка сложных процентов, которая дает тот же результат, что и m-разовое начисление процентов по ставке j/m.

Обозначим эффективную ставку через j. По определению множители наращения по двум ставкам (эффективной и номинальной при m-разовом начислении) должны быть равны друг другу:

$$(1+i)^n = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm}.$$

Из равенства множителей наращения следует

$$i = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1. \qquad (15)$$

Эффективная ставка при $m > 1$ всегда больше номинальной.

Замена в договоре номинальной ставки j при m-разовом начислении процентов на эффективную ставку i не изменяет финансовых обязательств участвующих сторон. *Обе ставки эквивалентны в финансовом отношении.* Отсюда, кстати, следует, что разные по величине номинальные ставки оказываются эквивалентными, если соответствующие им эффективные ставки имеют одну величину.

Пример 3.

Каков размер эффективной ставки, если номинальная ставка равна 25 % при помесячном начислении процентов? Имеем

$$\mathrm{i} = \left(1+\frac{0{,}25}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}280732.$$

Для участвующих в сделке сторон безразлично применить ставку 25 % при помесячном начислении процентов или годовую (эффективную) ставку 28,0732 %.

Для сокращения дальнейшей записи используем символ $j^{(m)}$, означающий размер номинальной ставки и количество начислений за год. Эквивалентная замена номинальной ставки имеет место только в том случае, когда удовлетворяется равенство

$$\left(1+\frac{j_1^{(m_1)}}{m_1}\right)^{m_1}=\left(1+\frac{j_2^{(m_2)}}{m_2}\right)^{m_2}.$$

Поскольку m может иметь только целые значения, то удобнее определять значение новой ставки, задаваясь величиной m_2:

$$j_2^{(m_2)}=m_2[\left(1+\frac{j_1^{(m_1)}}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{m_2}}-1].$$

Пример 4.

Определим номинальную ставку $j^{(4)}$, которая безубыточно заменит ставку $j^{(12)} = 25$ % в примере 3. Получим

$$j^{(4)}=4\left[\left(1+\frac{0{,}25}{12}\right)^{\frac{12}{4}}-1\right]=0{,}25524.$$

Таким образом, сокращение количества начислений потребует увеличения ставки с 25 до 25,524 %. При подготовке контрактов может возникнуть необходимость в определении j по заданным значениям i и m. Находим

$$j=m\left(\sqrt[m]{1+i}-1\right). \qquad (16)$$

Дисконтирование по сложной ставке. При изучении простых процентов мы рассматривали математическое дисконтирование и банковский (коммерческий) учет. Первое заключалось в определении P по значению S при заданной ставке процента, второе — при заданной учетной ставке. Применим первый метод и дисконтируем теперь сумму S по сложной ставке процентов. На основе (13) получим

$$P=\frac{S}{(1+i)^n}=Sv^n, \qquad (17)$$

$$v^n = \frac{S}{(1+i)^n} = \frac{1}{q^n}, \qquad (18)$$

Величину v называют *дисконтным*, ***учетным***, или *дисконтирующим*, ***множителем*** *(compound discount factor).* Значения этого множителя легко табулировать.

Для случаев, когда проценты начисляются *m* раз в году, получим

$$P = \frac{S}{(1+\frac{j}{m})^{nm}} = S v^{nm}, \qquad (19)$$

$$v^{nm} = \frac{1}{(1+i)^{nm}}. \qquad (20)$$

Напомним, что величину *P,* полученную дисконтированием *S,* называют *современной, текущей, стоимостью,* или *современной величиной S.* Современная стоимость может быть рассчитана на любой момент до выплаты суммы *S.*

Разность *S – P,* в случае, когда *P* определено дисконтированием, называют ***дисконтом***. Обозначим последний через *D:*

$$D = S - P = S(1 - v^n).$$

Пример 5.

Сумма в 5 млн руб. выплачивается через 5 лет. Необходимо определить ее современную величину при условии, что применяется ставка сложных процентов, равная 12 % годовых. Дисконтный множитель для данных условий составит $v = 1{,}12^{-5} = 0{,}56574$, т. е. первоначальная сумма сократилась почти на 44 %. Современная величина равна

$$P = 5000 \cdot 1{,}12^{-5} = 2837{,}1 \text{ тыс. руб.}$$

Современная величина платежа — одна из важнейших характеристик, применяемых в финансовом анализе. Остановимся на некоторых ее формальных свойствах. Отметим очевидное свойство — чем выше ставка процента, тем сильнее дисконтирование при всех прочих равных условиях (см. рис. 2). Например, если в примере 5 увеличить ставку вдвое, то дисконтный множитель снизится с 0,56574 до 0,34111.

Значение дисконтного множителя уменьшается и с ростом величины *m.*

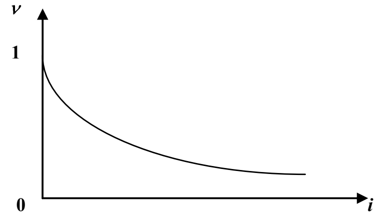


Рисунок 2 — Зависимость дисконтного множителя от ставки процента

Влияние срока платежа также очевидно — с увеличением срока величина современной стоимости убывает. Отсюда следует, что при очень больших сроках она крайне незначительна. Например, если взять ставку $i = 12\ \%$, то для $n = 10$, 50 и 100 находим следующие значения дисконтных множителей: 0,32197; 0,00346 и 0,000012. Высокие, и особенно инфляционные, ставки, примененные для дисконтирования, приводят к бессмысленным результатам даже при сравнительно небольших сроках: например, для ставки 200 % и сроке 5 лет дисконтный множитель равен 0,004116, т. е. близок к нулю.

1.5. Операции со сложной учетной ставкой

Учет по сложной учетной ставке. В практике учетных операций иногда применяют ***сложную учетную ставку*** *(compound discound rate).* В этих случаях процесс дисконтирования происходит с замедлением, так как каждый раз учетная ставка применяется не к первоначальной сумме (как при простой учетной ставке), а к сумме, дисконтированной на предыдущем шаге во времени. Дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется по формуле

$$P = S(1-d)^n, \qquad (21)$$

где d — сложная годовая учетная ставка.

Пример 6.

Долговое обязательство на сумму 5 млн руб., срок оплаты которого наступает через 5 лет, продано с дисконтом по сложной учетной ставке 15 % годовых. Каков размер полученной за долг суммы и величина дисконта (в тыс. руб.)? Имеем

$$P = 5000(1 - 0{,}15)^5 = 2218{,}5;$$

$$D = 5000 - 2218{,}5 = 2781{,}5.$$

Если применить простую учетную ставку того же размера, то

$$P = 5000(1 - 5 \cdot 0{,}15) = 1250;$$

$$D = 5000 - 1250 = 3750.$$

Как следует из приведенного примера, дисконтирование по сложной учетной ставке выгоднее для должника, чем по простой учетной ставке. Сказанное становится понятным при сравнении формул для дисконтных множителей: $w_{п} = (1 - nd_{п})$ и $w = (1 - d)^n$, где $d_{п}$, d — простая и сложная учетные ставки соответственно.

Согласно первой из приведенных формул значение дисконтного множителя равномерно уменьшается по мере роста n и достигает нуля при $n = 1 / d$. Согласно второй — множитель экспоненциально уменьшается и достигает нуля лишь в пределе, при $n = \infty$. Величины дисконтных множителей при применении простой и сложной учетных ставок показаны на рисунке 3.

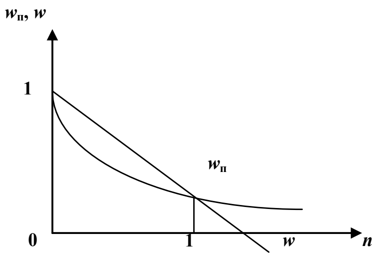


Рисунок 3 — Зависимость дисконтных множителей от срока оплаты

Номинальная и эффективная учетные ставки

Дисконтирование может производиться не один, а m раз в году, т. е. каждый раз учет производится по ставке f / m. В этом случае

$$P = S\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{nm}, \qquad (22)$$

где f — номинальная годовая учетная ставка.

Эффективная учетная ставка (d) характеризует степень дисконтирования за год. Определим ее на основе равенства дисконтных множителей:

$$(1-d)^n = \left(1-\frac{f}{m}\right)^{nm}, \text{откуда } d = 1-\left(1-\frac{f}{m}\right)^{nm}.$$

В свою очередь

$$f = m\left(1-\sqrt[m]{1-d}\right).$$

Эффективная учетная ставка во всех случаях, когда $m > 1$, меньше номинальной.

Пример 7.

По данным примера 6 определим сумму, полученную при поквартальном учете по номинальной учетной ставке 15 %, и эффективную учетную ставку. Имеем $f = 0{,}15$; $m = 4$; $mn = 20$;

$$P = 5000\left(1-\frac{0{,}15}{4}\right)^{20} = 2328 \text{ тыс. руб.}$$

Эффективная учетная ставка составит

$$d = 1-\left(1-\frac{0{,}15}{4}\right)^{4} = 0{,}14177 = 14{,}177\ \%.$$

$$S = \frac{P}{(1-d)^n}, \tag{23}$$

$$S = \frac{P}{\left(1-\frac{f}{m}\right)^{nm}}. \tag{24}$$

Множитель наращения при использовании сложной ставки d равен $(1-d)^{-n}$.

Сравнение интенсивности процессов наращения и дисконтирования по разным видам процентных ставок

Выше для наращения и дисконтирования использовались ставки $i_п$, i, j, $d_п$, d, f. Применение этих ставок даже в одинаковых исходных условиях приводит к различным результатам. В связи с этим представляет практический интерес сравнение результатов наращения и дисконтирования по различным ставкам.

Для этого достаточно сопоставить соответствующие множители наращения. Аналогичное можно проделать и с дисконтными множителями. Опустив формальные доказательства, запишем сразу необходимые соотношения при условии, что размеры ставок одинаковые. Варианты со ставками j и f рассматривать не будем, так как результат зависит и от значения m.

Наращение по сложной учетной ставке. Иногда наращенную сумму получают и с помощью сложной учетной ставки. Из формул (23) и (24) следует: Множители наращения соотносятся между собой следующим образом:

$$(1+i)^n < 1 + ni_{\text{п}} < \frac{1}{1-nd} < \frac{1}{(1-d)^n} \text{ при } 0 < n < 1;$$

$$1 + i < 1 + i_{\text{п}} < \frac{1}{1-d_{\text{п}}} < \frac{1}{1-d} \text{ при } n = 1;$$

$$1 + ni_{\text{п}} < 1 + i^n < \frac{1}{(1-d)^n} < \frac{1}{1-nd_{\text{п}}} \text{ при } n > 1.$$

Как видим, соотношения множителей зависят от сроков наращения процентов. Так, для срока, превышающего год, наибольший рост дает простая учетная ставка, наименьший — ставка простых процентов. В таблице 3 приведены значения множителей наращения для разных видов ставок при условии, что их размеры одинаковы — 20 %.

Таблица 3 — Множители наращения для разных видов ставок (20 %)

Срок (в годах)	i_s	i	d_s	d
0,5	1,10	1,0954	1,1111	1,1180
0,8	1,16	1,1570	1,1905	1,1954
1,0	1,20	1,2000	1,2500	1,2500
1,5	1,30	1,3145	1,4286	1,3975
2,0	1,40	1,4400	1,6667	1,5625
3,0	1,60	1,7280	2,5000	1,9531
5,0	2,00	2,4883	∞	3,0517
10,0	11,00	6,1917	∞	9,3132

Аналогичным образом получим соотношения для дисконтных множителей:

$$(1-d)^n < 1 - nd_п < \frac{1}{1+ni} < \frac{1}{(1+i)^n} \text{ при } 0 < n < 1;$$

$$1 - d < 1 - d_п < \frac{1}{1+i_n} < \frac{1}{1+i} \text{ при } n = 1;$$

$$1 - nd_п < (1 - d)^n < \frac{1}{(1+i)^n} < \frac{1}{1+ ni_S} \text{ при } n > 1.$$

Для срока более года наиболее сильно дисконтирование проявляется при применении простой ставки процента и в наименьшей степени — при использовании простой учетной ставки.

Задания для самостоятельной работы

Итак, мы рассмотрели наращение и дисконтирование (дискретное и непрерывное) по эффективным и номинальным ставкам. Выполним самостоятельно некоторые расчеты в приложении MS Excel по темам.

Тема 1: «Наращение дискретное и непрерывное».

Провести расчеты будущей стоимости S по формулам, приведенным выше и построить графики соответствующих функций.

Дано:
P = 100 у.е.
n = 5 лет
m =12 раз в году.

Вычислить: будущую стоимость для ставок (от 1 до 50 %) в случае простых процентов, сложных эффективных, номинальных и при непрерывном наращении. Построить графики функций (рис. 4).

Решение:

i,%	S(прос.)	S(сл.эф.)	S(сл.ном.)	S(непр.)
1	105,00	105,10	105,12	105,13
2	110,00	110,41	110,51	110,52
3	115,00	115,93	116,16	116,18
4	120,00	121,67	122,10	122,14
5	125,00	127,63	128,34	128,40
6	130,00	133,82	134,89	134,99
7	135,00	140,26	141,76	141,91
8	140,00	146,93	148,98	149,18
9	145,00	153,86	156,57	156,83
10	150,00	161,05	164,53	164,87
11	155,00	168,51	172,89	173,33
12	160,00	176,23	181,67	182,21
13	165,00	184,24	190,89	191,55
14	170,00	192,54	200,56	201,38
15	175,00	201,14	210,72	211,70
16	180,00	210,03	221,38	222,55
17	185,00	219,24	232,57	233,96
18	190,00	228,78	244,32	245,96
19	195,00	238,64	256,65	258,57
20	200,00	248,83	269,60	271,83
21	205,00	259,37	283,18	285,77
22	210,00	270,27	297,44	300,42
23	215,00	281,53	312,40	315,82
24	220,00	293,16	328,10	332,01
25	225,00	305,18	344,58	349,03
26	230,00	317,58	361,87	366,93
27	235,00	330,38	380,01	385,74
28	240,00	343,60	399,05	405,52
29	245,00	357,23	419,02	426,31
30	250,00	371,29	439,98	448,17
31	255,00	385,79	461,96	471,15
32	260,00	400,75	485,03	495,30
33	265,00	416,16	509,23	520,70
34	270,00	432,04	534,61	547,39
35	275,00	448,40	561,23	575,46
36	280,00	465,26	589,16	604,96
37	285,00	482,62	618,45	635,98
38	290,00	500,49	649,18	668,59
39	295,00	518,89	681,40	702,87
40	300,00	537,82	715,20	738,91
41	305,00	557,31	750,64	776,79
42	310,00	577,35	787,81	816,62
43	315,00	597,97	826,79	858,49
44	320,00	619,17	867,66	902,50
45	325,00	640,97	910,51	948,77
46	330,00	663,38	955,45	997,42
47	335,00	686,41	1 002,56	1 048,56
48	340,00	710,08	1 051,96	1 102,32
49	345,00	734,40	1 103,75	1 158,83
50	350,00	759,38	1 158,05	1 218,25

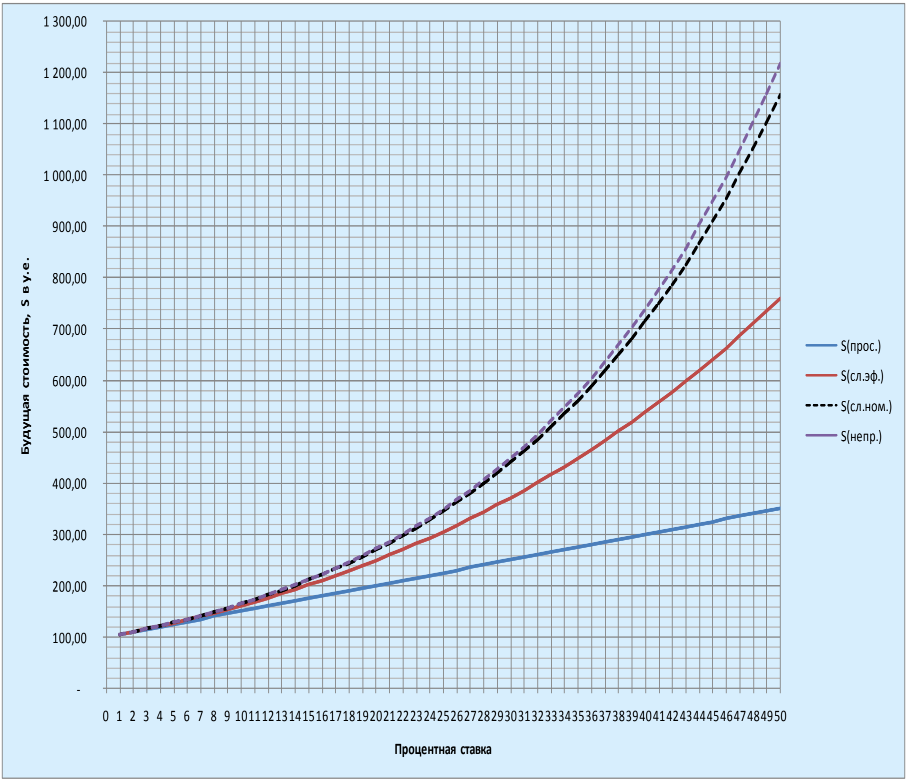


Рисунок 4 — Зависимость будущей стоимости от процентных ставок при дискретном наращении (по простой, сложной эффективной и номинальной) и непрерывном наращении

Тема 2: «Дисконтирование дискретное и непрерывное».

Провести расчеты текущей стоимости P по формулам, приведенным выше и построить графики соответствующих функций.

Дано:

S = 100 у.е.

n = 5 лет

m =12 раз в году.

Вычислить: текущую стоимость для ставок (от 1 до 50 %) в случае простых процентов, сложных эффективных, номинальных и при непрерывном дисконтировании. Построить графики функций (рис. 5).

Решение:

i,%	P(прос.)	P(сл.эф.)	P(сл.ном.)	P(непр.)
1	95,24	95,15	95,12	95,12
2	90,91	90,57	90,49	90,48
3	86,96	86,26	86,09	86,07
4	83,33	82,19	81,90	81,87
5	80,00	78,35	77,92	77,88
6	76,92	74,73	74,14	74,08
7	74,07	71,30	70,54	70,47
8	71,43	68,06	67,12	67,03
9	68,97	64,99	63,87	63,76
10	66,67	62,09	60,78	60,65
11	64,52	59,35	57,84	57,69
12	62,50	56,74	55,04	54,88
13	60,61	54,28	52,39	52,20
14	58,82	51,94	49,86	49,66
15	57,14	49,72	47,46	47,24
16	55,56	47,61	45,17	44,93
17	54,05	45,61	43,00	42,74
18	52,63	43,71	40,93	40,66
19	51,28	41,90	38,96	38,67
20	50,00	40,19	37,09	36,79
21	48,78	38,55	35,31	34,99
22	47,62	37,00	33,62	33,29
23	46,51	35,52	32,01	31,66
24	45,45	34,11	30,48	30,12
25	44,44	32,77	29,02	28,65
26	43,48	31,49	27,63	27,25
27	42,55	30,27	26,31	25,92
28	41,67	29,10	25,06	24,66
29	40,82	27,99	23,87	23,46
30	40,00	26,93	22,73	22,31
31	39,22	25,92	21,65	21,22
32	38,46	24,95	20,62	20,19
33	37,74	24,03	19,64	19,20
34	37,04	23,15	18,71	18,27
35	36,36	22,30	17,82	17,38
36	35,71	21,49	16,97	16,53
37	35,09	20,72	16,17	15,72
38	34,48	19,98	15,40	14,96
39	33,90	19,27	14,68	14,23
40	33,33	18,59	13,98	13,53
41	32,79	17,94	13,32	12,87
42	32,26	17,32	12,69	12,25
43	31,75	16,72	12,10	11,65
44	31,25	16,15	11,53	11,08
45	30,77	15,60	10,98	10,54
46	30,30	15,07	10,47	10,03
47	29,85	14,57	9,97	9,54
48	29,41	14,08	9,51	9,07
49	28,99	13,62	9,06	8,63
50	28,57	13,17	8,64	8,21

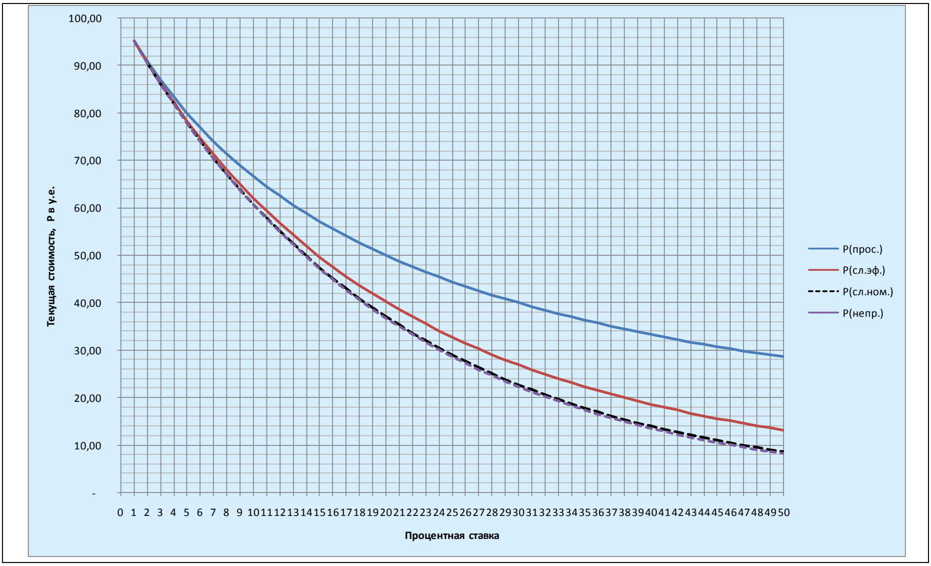


Рисунок 5 — Зависимость текущей стоимости от процентных ставок при дискретном дисконтировании (по простой, сложной эффективной и номинальной) и непрерывном дисконтировании

Задачи для самостоятельного решения

1. Клиент поместил в банк $ 4500 на 6 лет под 10,5 % годовых. Какая сумма будет на счете, если % начисляются ежемесячно?
2. Клиент поместил в сбербанк 2000 руб. на 5 лет под 7 % годовых. Какая сумма будет на счете, если % начисляются ежемесячно с дополнительными ежемесячными вкладами 500 руб. (начисление вкладов постнумерандо) и без дополнительных вкладов?
3. Клиент поместил в сбербанк 5000 руб. на 5 лет под 10 % годовых. Какая сумма будет на счете, если % начисляются ежемесячно с дополнительными ежемесячными вкладами 1000 руб. (начисление вкладов постнумерандо)?
4. Клиент поместил в сбербанк 5000 руб. на 5 лет под 10 % годовых. Какая сумма будет на счете, если % начисляются ежемесячно с дополнительными ежемесячными вкладами 1000 руб.(начисление вкладов пренумерандо)?
5. Клиент поместил в сбербанк 5000 руб. на 5 лет под 10 % годовых. Какая сумма будет на счете, если % начисляются ежемесячно с дополнительными ежемесячными вкладами 1000 руб. (начисление вкладов пренумерандо) и без дополнительных вкладов?
6. Клиент поместил в сбербанк 5000 руб. на 5 лет под 10 % годовых. Какая сумма будет на счете, если % начисляются ежемесячно с дополнительными

ежемесячными вкладами 1000 руб. (начисление вкладов постнумерандо) и без дополнительных вкладов?

7. Определите будущую стоимость денег на депозите через 5 лет при ежегодном начислении процентов. Начальная сумма 10 000 рублей. Годовая процентная ставка 7 %. Сделайте это по формуле и в Excel по формуле БС — сравните.
8. Определите будущую стоимость денег на депозите через 5 лет при ежегодном начислении процентов. Начальная сумма 10 000 рублей. Ежеквартальная процентная ставка 3 %. Сделайте это по формуле и в Excel по формуле БС — сравните.
9. Определите будущую стоимость денег через 5 лет при непрерывном начислении процентов по ставке 1 %. Начальная сумма 10 000 рублей.
10. Определите текущую стоимость (т. е. проведите дисконтирование) будущей стоимости 20 000 руб., полученной через 5 лет. Текущая рыночная ставка дисконтирования составляла 5 % годовых.
11. Определить текущую стоимость от будущей стоимости 1000, получаемой через 7 лет при непрерывном дисконтировании 10 % годовых.
12. Определить текущую стоимость от будущей стоимости 1000, получаемой через 7 лет при дискретном дисконтировании 10 % годовых.
13. Фирма поместила в банк 45 000 $ на 6 лет под 10,5 % годовых. Какая сумма будет на счете, если % начисляются ежегодно? Рассчитать, какую сумму нужно поместить в банк на тех же условиях, чтобы через 6 лет накопить 250 000 $?
14. Фирма поместила в банк $ 50 000 на 5 лет под 10 % годовых. Какая сумма будет на счете, если % начисляются ежегодно? Рассчитать, какую сумму нужно поместить в банк на тех же условиях, чтобы через 5 лет накопить $ 300 000?

Вопросы к разделу 1

1. *Что послужило развитию финансовой математики?*
2. *Актуарная наука. Актуарий.*
3. *Что составляет предмет финансовой математики?*
4. *Задачи количественного финансового анализа.*
5. *В каких условиях применяется количественный финансовый анализ?*
6. *Основные задачи финансовой математики.*
7. *Определите финансовую математику как науку.*
8. *Что является объектом исследования финансовой математики?*
9. *Основные виды параметров в условиях финансовых операций.*
10. *Что представляет из себя экспертная система по финансовой математике?*
11. *С каким видом деятельности более всего связана финансовая математика?*

12.Цель инвестиций.
13.Суть термина «процент».
14.Что такое процентные ставки?
15.Виды коммерческих рисков.
16.Опишите факторы, влияющие на уровень процентных ставок.
17.Опишите факторы, влияющие на различие процентных ставок.
18.Временная стоимость денег.
19.Текущая стоимость и будущая стоимость денег. От чего зависит?
20.Наращение и дисконтирование.
21.Простые и сложные проценты.
22.Формулы определения будущей стоимости при простых и сложных процентных ставках.
23.Наращение с учетом промежуточных начислений процентов в году.
24.Непрерывное наращение. Смысл перехода от дискретного наращения к непрерывному. Формулы.
25.Приведение дохода с дискретным наращением к эквивалентному доходу с непрерывным наращением.
26.Приведение доходов с непрерывным наращением к доходам с дискретным наращением.
27.Дискретное и непрерывное дисконтирование. Понятия и формулы.
28. Что означает номинальная ставка?
29.Что означает эффективная ставка?
30.Что больше: эффективная ставка или номинальная при количестве начислений процентов в году $m > 1$?
31.Как обозначаются эффективные и номинальные ставки?
32.Дисконтирование по сложной ставке.
33.Какую величину называют учетным (или дисконтным) множителем?
34.Что такое дисконт и как он определяется?
35.Значение дисконтного множителя уменьшается или увеличивается с ростом величины m?
36.Что означает сложная учетная ставка?
37.Как выглядит график изменения дисконтных множителей при простой и сложной учетной ставке?
38.Что называется номинальной учетной ставкой? Как обозначается?
39.Что называется эффективной учетной ставкой? Как обозначается?
40.Зависимость между эффективной и номинальной учетными ставками. Выражение одной через другую.
41.Сделайте сравнение интенсивности процессов наращения и дисконтирования по разным видам процентных ставок.

РАЗДЕЛ 2.
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

2.1. Определение процентных ставок

Если известны все основные параметры финансовой операции, кроме процентных ставок, то их можно определить аналитически, если не учитывать рентные платежи (постоянные или переменные) при операциях наращения или дисконтирования. С учетом последних параметров, расчетные формулы усложняются, и задачу приходится решать численно, т. е. с использованием итерационных процедур.

Приведем формулы определения процентных ставок для дискретного и непрерывного наращения (или дисконтирования).

Из формулы (1) легко получить простую процентную ставку $i_п$:

$$i_п = \frac{\frac{S}{P - 1}}{n}, \tag{25}$$

где S — будущая стоимость;
P — сумма основного долга (или текущая стоимость);
n — срок вклада в годах.

Аналогично легко получить учетную простую процентную ставку $d_п$:

$$d_п = \frac{\frac{1 - P}{S}}{n}, \tag{26}$$

Из формулы (2) легко получить сложную процентную ставку i:

$$i = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1. \tag{27}$$

Из формулы (14), аналогично предыдущему, можно получить сложную номинальную процентную ставку j:

$$j = m\sqrt[N]{\frac{S}{P}} - 1. \tag{28}$$

где $N = nm$.

Из формулы (21) можно определить сложную годовую учетную ставку *d*:

$$d = 1 - \sqrt[n]{\frac{P}{S}}. \tag{29}$$

Из формулы (22), аналогично формуле (28), можно получить сложную номинальную годовую учетную процентную ставку *f*:

$$f = m\left(1 - \sqrt[N]{\frac{P}{S}}\right). \tag{30}$$

Самостоятельно составьте примеры, которые подобны приведенным в главе 1, для формул: 1, 2, 14, 21 и 22. Для решения поставленных в примерах задач используйте формулы 25–30.

Постоянная и переменная сила роста

В практических финансово-кредитных операциях непрерывное наращение, т. е. наращение за бесконечно малые отрезки времени, применяется редко. Большое значение непрерывное наращение имеет в анализе сложных финансовых проблем, например, при обосновании и выборе инвестиционных решений, в финансовом проектировании. С помощью непрерывных процентов удается учесть сложные закономерности процесса наращения, например, использовать изменяющиеся по определенному закону процентные ставки.

При непрерывном наращении процентов применяют особый вид процентной ставки — ***силу роста*** *(force of interest).* Сила роста характеризует относительный прирост наращенной суммы за бесконечно малый промежуток времени. Она может быть постоянной или изменяться во времени.

Постоянная сила роста. Как было показано раньше, при дискретном начислении процентов *m* раз в году по номинальной ставке *j* наращенная сумма находится как

$$S = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}.$$

Чем больше *m,* тем меньше промежуток между моментами начисления процентов. В пределе при $m \to \infty$ имеем

$$S = P \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} = Pe^{jn},$$

где *e* — экспонента.

Для того чтобы отличить непрерывную ставку от дискретной, обозначим силу роста как δ. Теперь можно записать

$$S = Pe^{\delta n}. \tag{31}$$

Итак, при непрерывном наращении процентов наращенная сумма равна конечной величине, зависящей от первоначальной суммы, срока наращения и силы роста. Сила роста представляет собой номинальную ставку сложных процентов при $m \to \infty$. Легко показать, что дискретные и непрерывные ставки наращения находятся в функциональной зависимости.

Из равенства множителей наращения $(1 + i)^n = e^{\delta n}$ следует:

$$\delta = \ln(1 + i), \tag{32}$$

$$i = e^{\delta} - 1. \tag{33}$$

Пример 8.

Сумма, на которую начисляются непрерывные проценты, равна 2 млн руб., сила роста 10 %, срок 5 лет. Наращенная сумма составит

$$S = 2\,000\,000 \cdot e^{0,1 \cdot 5} = 3\,297\,744{,}25 \text{ руб.}$$

Непрерывное наращение по ставке = 10 % равнозначно наращению за тот же срок дискретных сложных процентов по годовой ставке. Находим

$$i = e^{0,1} - 1 = 0{,}10517.$$

В итоге получим

$$S = 2\,000\,000(1 + 0{,}10517)^5 = 3\,297\,744{,}25 \text{ руб.}$$

Дисконтный множитель на основе силы роста (математическое дисконтирование) находится элементарно, для этого решим (1) относительно *P:*

$$P = Se^{-\delta n}. \tag{34}$$

Дисконтный множитель, как видим, равен $e^{-\delta n}$.

Пример 9.

Долговое обязательство на сумму 5 млн руб., срок оплаты которого наступает через 5 лет. Определим текущую (современную) стоимость платежа при условии, что дисконтирование производится по силе роста 12 % и по дискретной сложной учетной ставке 12 %. Получим в тыс. руб.:

$$P = 5000e^{-0{,}12\cdot 5} = 2744,$$

$$P = 5000(1 - 0{,}12)^5 = 2639.$$

Переменная сила роста. Пусть сила роста изменяется во времени, следуя некоторому закону, представленному в виде непрерывной функции времени:

$$\delta_t = f(t).$$

Тогда наращенная сумма и современная величина определяются как

$$S = Pe^{\int_0^n \delta_t dt};\ P = Se^{-\int_0^n \delta_t dt}.$$

Функция времени может быть самого различного вида. Рассмотрим только два ее варианта — линейную и экспоненциальную. Начнем с линейной функции:

$$\delta_t = \delta + at,$$

где δ — начальное значение силы роста;
a — прирост силы роста в единицу времени.

Нетрудно доказать, что

$$\int_0^n \delta_t dt = \int_0^n (\delta + at)dt = \delta n + \frac{an^2}{2}$$

Таким образом, множитель наращения находится как

$$q = e^{\delta n + \frac{an^2}{2}}. \qquad (35)$$

Пример 10.

Пусть начальное значение силы роста равно 8 %, процентная ставка непрерывно и линейно изменяется, прирост за год составляет 2 % (a = 0,02). Срок наращения 5 лет. Для расчета множителя наращения (3.30) найдем его степень:

$$0{,}08 \cdot 5 + 0{,}02 \cdot 5^2 / 2 = 0{,}65.$$

Искомый множитель составит $q = e^{0,65} = 1{,}91554$.

Продолжим пример. Предположим, что сила роста линейно уменьшается (пусть $a = -0{,}02$). В этом случае степень множителя равна 0,15 и соответственно $q = e^{0,15} = 1{,}16183$.

Рассмотрим ситуацию, когда сила роста изменяется экспоненциально (по геометрической прогрессии):

$$\delta_t = \delta a^t,$$

где δ — начальное значение силы роста;

a — постоянный темп роста. В этом случае степень множителя равна

$$\int_0^n \delta_t \, dt = \frac{\delta}{\ln a}(a^n - 1),$$

а сам множитель находится как

$$q = \frac{\delta}{e^{\ln a}}(a^{n-1}). \qquad (36)$$

Доказательство формулы (36):

Определим степень множителя наращения

$$q = e^{\int_0^n \delta a^t dt}:$$

$$\int_0^n \delta a^t dt = \delta \frac{a^t}{\ln a}\bigg|_0^n = \delta\left(\frac{a^n}{\ln a} - \frac{1}{\ln a}\right) = \frac{\delta}{\ln a}(a^n - 1).$$

В свою очередь при наращении с постоянной силой роста

$$\delta = \frac{\ln \frac{S}{P}}{n}. \qquad (37)$$

При наращении с изменяющейся с постоянным темпом силой роста

$$\delta = \frac{\ln a \ln \frac{S}{P}}{a^n - 1}. \qquad (38)$$

Пример 11.

Начальный уровень силы роста 8 %, процентная ставка непрерывно и экспоненциально увеличивается (годовой прирост 20 %, a = 1,2), срок наращения 5 лет. Необходимо определить множитель наращения q. Степень этого множителя за весь срок равна

$$\frac{0{,}8}{\ln(1{,}2)}(1{,}2^5 - 1) = 0{,}65305,$$

соответственно $q = e^{0{,}65305} = 1{,}92139$.

Процентные ставки спот, форвардные процентные ставки

До сих пор мы рассматривали процессы наращения и дисконтирования. Сейчас же мы обсудим, как определяются реальные процентные ставки, использующиеся в этих процессах. Начнем с двух основных и важных видов процентных ставок — спот и форвардных ставок.

Процентная ставка спот — это процентная ставка, которая используется на финансовых рынках для дисконтирования будущих денежных потоков и приведения их к **текущей стоимости.** Возьмем, например, денежный поток через один год. Одногодичной спот-ставкой будет ставка, по которой этот денежный поток будет дисконтирован и приведен к его текущей рыночной стоимости. Если же мы возьмем денежный поток, скажем, через 5 лет, ставкой, по которой эта сумма будет дисконтирована и приведена к текущей рыночной стоимости, будет пятилетняя спот-ставка, и т. д.

Обозначив одногодичные и пятилетние спот-ставки через r_1 и r_5 и предполагая **непрерывное дисконтирование,** определим текущую стоимость по:

$$P_1 = S_1 e^{-r_1}, \qquad P_5 = S_5 e^{-r_5 5},$$

а спот-ставка за период n рассчитывается так:

$$r_n = \frac{\ln \frac{S_n}{P_n}}{n}. \qquad (39)$$

Однако большинство финансовых рынков на практике используют **дискретное дисконтирование,** поэтому спот-ставкой периода n будет значение r_n в следующем уравнении:

$$P_n = \frac{S_n}{(1 + r_n)^n}\,. \tag{40}$$

Типичным примером применения спот-ставок является нахождение доходности по облигациям с нулевым купоном. По таким облигациям не выплачиваются периодические процентные платежи и они погашаются по номинальной стоимости в конце срока. Поэтому эти облигации выпускаются с дисконтом к номинальной стоимости, и во время всего периода обращения торговля по ним производится с учетом дисконта, так как в любой момент времени текущая цена облигаций соответствует современной стоимости выкупного платежа.

Процентная ставка, используемая на рынке для дисконтирования выкупной цены облигации, является *спот-ставкой* соответствующего периода до погашения. Однако эта спот-ставка не фигурирует во время торгов на рынке, определяется лишь текущая цена облигаций с нулевым купоном.

Спот-ставку можно рассчитать, зная текущую стоимость облигации, из следующего уравнения:

$$r_n = \left(\frac{S_n}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1, \tag{41}$$

где r_n — спот-ставка периода n;

S_n — стоимость при погашении через n лет (номинальная стоимость);

P — современная стоимость, или текущая цена облигации с нулевым купоном и со сроком до погашения n лет.

Пример 12.

Предположим, что облигация с нулевым купоном имеет срок до погашения 30 лет. Номинальная цена облигации равна 100 единицам, а в настоящее время ее рыночная цена равна 16,97 у.е. Тогда 30-летняя спот-ставка при расчете по формуле (3) равна:

$$r_n = \left(\frac{100}{16{,}97}\right)^{\frac{1}{30}} - 1 = 6{,}09\ \%.$$

Форвардная процентная ставка — это процентная ставка, зафиксированная сегодня для ссуды, предоставляемой в будущем. Таким образом, процентная ставка для трехмесячного займа, предоставляемого через три месяца — это трехмесячная форвардная процентная ставка на три месяца. Если ссуда одногодичная и предоставляется через 12 месяцев, то процентная ставка для нее будет одногодичная форвардная ставка на 12 месяцев. На денежных рынках эти ставки известны как форвардные форварды и обозначаются в виде $^{3}/_{6}$ или $^{12}/_{24}$, что означает начало будущих финансовых операций через 3 и 12 месяцев, а окончание соответственно через 6 и 24 месяца. Эти ставки могут также называться как три против шести или 12 против 24.

Форвардные ставки не котируются напрямую на рынке. Однако относительно денежных рынков они могут быть получены по информации о краткосрочных займах и депозитах. Для рынка облигаций, включая казначейские векселя, форвардные процентные ставки можно определить исходя из соотношения между последовательными спот-ставками.

Непосредственный расчет форвардных ставок зависит от того, простые или сложные проценты применяются на данном конкретном рынке. В случае сложных процентов расчет зависит также от того, применяется непрерывное или дискретное наращение. Простые проценты на финансовых рынках применяются к финансовым инструментам со сроком менее одного года. На рынках облигаций используется дискретное наращение, а для опционов облигаций — непрерывное наращение.

Общая формула для нахождения форвардных ставок *(RF)* на финансовых рынках, учитывающая указанные неопределенности, выглядит следующим образом:

$$RF = \frac{1}{n-m}\,\frac{(nr_n)-(mr_m)}{1+\frac{mr_m}{360}}, \qquad (42)$$

где n — продолжительность в днях более длинного финансового инструмента;

m — продолжительность в днях более короткого финансового инструмента;

r_n — процентная ставка по длинному финансовому инструменту;

r_m — процентная ставка по короткому финансовому инструменту.

Для иллюстрации рассмотрим этот же пример:

$$RF = \frac{1}{90} \cdot \frac{(180 \cdot 0{,}0625) — (90 \cdot 0{,}06)}{1 + \frac{(90 \cdot 0{,}06)}{360}} = 0{,}064039 \approx 6{,}4\ \%.$$

Соглашения по подсчету дней в году особенно важны при расчете форвардных процентных ставок. Рассмотренный нами пример, характерен для большинства финансовых рынков, не торгующих фунтами стерлингов. Если бы расчеты производились для английского межбанковского рынка, необходимо было бы принять 365 дней в году. Соглашения по подсчету дней в году в различных странах принимаются по-разному.

Форвардные ставки в случае непрерывного наращения

В случае непрерывного наращения форвардная ставка определяется следующим образом:

$$RF_n = \frac{nr_n - mr_m}{n - m}\,. \tag{43}$$

Применение формулы (43) может быть проиллюстрировано на следующем примере. Предположим, что 180-дневная процентная ставка равна 11 % годовых, а 90-дневная — 10 % годовых.

Форвардная ставка по 90-дневному финансовому инструменту через 90 дней рассчитывается так:

$$RF = \frac{(180 \cdot 11) - (90 \cdot 10)}{180 - 90} = 12\ \%.$$

В случае дискретного наращения найти форвардную ставку можно с помощью формулы (44), где через r_n и r_m обозначены соответствующие ставки-спот, а *n и m* —сроки, измеряемые в годах:

$$RF_n = \sqrt[n-m]{\frac{(1 + r_n)^n}{(1 + r_m)^m}} - 1. \tag{44}$$

Численный пример поможет понять данную формулу.

Пример 13.

Предположим, что трехгодичная спот-ставка составляет 12,75 % годовых, а двухгодичная спот-ставка — 11,63 % годовых. Форвардная ставка равна:

$$RF = \sqrt[3-2]{\frac{1{,}1275^3}{1{,}1163^2}} - 1 = 15{,}04.$$

В этом примере *(n – m)* равно единице, так как разница между двумя периодами составляет один год. Если бы мы использовали ставки, где разница составляла бы, скажем, 6 или 3 месяца, тогда *(n – m)* было бы равно 0,5 или 0,25 соответственно.

Очевидно, что так как мы живем в мире, полном неопределенностей, форвардные ставки, рассчитанные по этим формулам, могут не быть равны, а точнее, не будут равны тем краткосрочным ставкам, которые реально установятся в будущем. Что действительно выражают форвардные ставки, так это текущие ожидания рынка относительно процентных ставок в будущем.

Для пояснения рассмотрим предлагаемые на рынке облигации с нулевым купоном и со сроком до погашения один и два года. Инвестор, желающий разместить средства на два года, имеет выбор: либо инвестировать средства на один год, а затем вновь вложить деньги в тот же инструмент во втором году, либо же сразу инвестировать средства в двухгодичный инструмент.

Выбор инвестора обусловлен сравнением форвардной ставки по двухгодичному инструменту со своими ожиданиями относительно того, какая доходность по одногодичным инструментам будет через год. Если инвестор ожидает, что доходность через год будет выше текущей двухгодичной спот-ставки, он приобретет годовую облигацию и спустя год пролонгирует данный инструмент. Если же ожидается, что ставки в будущем будут ниже предлагаемых форвардных ставок, инвестор предпочтет двухлетнюю облигацию.

На рынках, где инвесторы могут выбрать финансовые инструменты в соответствии со своими ожиданиями, форвардная ставка отражает текущие ожидания рынка относительно будущей спот-ставки.

2.2. Определение срока ссуды

Если известны все основные параметры финансовой операции, кроме срока ссуды, то их можно определить аналитически.

Приведем формулы определения срока ссуды для дискретного и непрерывного наращения (или дисконтирования).

Из формулы (1) легко получить срок ссуды *n*:

$$n = \frac{\frac{S}{P} - 1}{i_\text{п}}, \tag{45}$$

где S — будущая стоимость;
P — сумма основного долга (или текущая стоимость);
$i_\text{п}$ — простая процентная ставка.

Аналогично легко получить *n* через учетную простую процентную ставку $d_\text{п}$:

$$n = \frac{1 - \frac{P}{S}}{d_\text{п}}. \tag{46}$$

Из формулы (2) легко получить *n* через сложную процентную ставку *i*:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{P}\right)}{1 + i}. \tag{47}$$

Из формулы (14), аналогично предыдущему, можно получить *n* через сложную номинальную процентную ставку *j*:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{P}\right)}{m\left(1 + \frac{j}{m}\right)}. \tag{48}$$

Из формулы (21) можно определить *n* через сложную годовую учетную ставку *d*:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{P}{S}\right)}{1 - d}. \tag{49}$$

Из формулы (22), аналогично формуле (28), можно получить сложную номинальную годовую учетную процентную ставку *f*:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{P}{S}\right)}{m\left(1 - \frac{f}{m}\right)}. \qquad (50)$$

В случае непрерывных процентных ставок (силы роста) имеем следующие формулы.

Срок ссуды *n* при постоянной силе роста найдем на основе формулы (31):

$$n = \frac{\ln\left(\frac{P}{S}\right)}{\delta}. \qquad (51)$$

При наращении с изменяющейся силой роста (с постоянным темпом роста *a*) на основе формулы (36) получим

$$n = \frac{\left[\ln + \frac{\ln a \ln\frac{S}{P}}{\delta}\right]}{\ln a}. \qquad (52)$$

Самостоятельно составьте примеры, которые подобны приведенным в главе 1, для формул: 1, 2, 14, 21 и 22. Для решения поставленных в примерах задач поиска срока ссуды используйте формулы 45–50.

2.3. Определение рентных платежей

При расчете финансовых результатов в современной финансово-кредитной сфере широко используется такое понятие как *потоки платежей*. ***Потоками платежей*** называют финансовые потоки, учитываемые во многих финансовых операциях, отражающих периодическое поступление доходов от инвестиций, выплату пенсий, погашение задолженности за кредит и т. д. Они могут быть ***регулярными*** и ***нерегулярными***.

Нерегулярные потоки платежей могут быть как *положительными* (поступления), так и *отрицательными* (выплаты) величинами, а соответствующие платежи могут производиться через разные интервалы времени. Потоки платежей, все члены которых положительны, а интервалы времени между платежами одинаковы, называют ***финансовой рентой*** или просто ***рентой***.

Рента характеризуется следующими параметрами:

член ренты — размер отдельного платежа,

период ренты — временной интервал между двумя последовательными платежами,

срок ренты — время от начала первого периода ренты до конца последнего периода,

процентная ставка — ставка процентов, начисляемых в период ренты.

По количеству выплат членов ренты на протяжении года, ренты делятся на ***годовые*** *(1 раз в году),* ***срочные*** (несколько раз в году), ***непрерывные*** (много раз в году).

Приведенная стоимость серии равных платежей и поступлений, происходящих на протяжении некоторого количества периодов, называется ***аннуитетом*** и связанна преимущественно с использованием долговых финансовых инструментов.

Величина периодической выплаты (аннуитет) $A = KS$, где S — величина кредита; K — коэффициент аннуитета.

Коэффициент аннуитета (K) превращает разовый платеж в платежный ряд по формуле:

$$K = \left(1 + \frac{kj}{m}\right) \frac{\frac{j}{m}\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} - 1}, \qquad (53)$$

где k — коэффициент, определяющий поступление рентных платежей в начале месяца ($k = 1$ — пренумерандо) или в конце месяца ($k = 0$ — постнумерандо).

Рассмотрим учет срочных регулярных рентных платежей (R) в определении будущей стоимости при дискретном наращении.

Формула (14) в этом случае будет иметь следующий вид:

$$S = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} + R\left(1 + \frac{kj}{m}\right) \frac{\left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} - 1\right]m}{j}, \qquad (54)$$

где R — рентные платежи (постоянные ежемесячные).

Обозначим $q = 1 + \frac{j}{m}$ коэффициент наращения. В этом случае формула (47) будет иметь следующий вид:

$$S = Pq^{nm} + R\left(1 + \frac{kj}{m}\right)(q^{nm} - 1)\frac{m}{j}.$$

Отсюда получим формулу для расчета рентных платежей R:

$$R = \frac{S - Pq^{nm}}{\left(1 + \frac{kj}{m}\right)(q^{nm} - 1)\frac{m}{j}}. \quad (55)$$

Остальные параметры (P, n, j) определяются при учете постоянных рентных платежей из формулы (54). Предлагается самостоятельно вывести эти формулы. Затруднение вызовет определение процентных ставок j. Здесь необходимо использовать численные методы решения. В MS Excel существует функция «СТАВКА», а для численного расчета из формул (54) или (55) функции «Подбор параметра» и «Поиск решения».

Задания для самостоятельной работы

Мы рассмотрели основные формулы для определения различных процентных ставок, сроков ссуды и рентных платежей. Выполним самостоятельно некоторые расчеты в приложении MS Excel по темам.

Тема 3: «Определение процентных ставок».

Провести расчеты процентных ставок по формулам, приведенным выше и построить графики соответствующих функций.

Дано:
S = 100 у.е.
P = 25 у.е.
m = 12 раз в году.

Вычислить:
процентные ставки в случае простых процентов ($i_{п}$), сложных эффективных (i), сложных номинальных (j) и при непрерывном наращении (δ). Построить графики функций (рис. 6).

Решение:

n	*i_п*	*i*	*j*	*δ*
1	300,00	300,00	146,95	138,63
2	150,00	100,00	71,36	69,31
3	100,00	58,74	47,11	46,21
4	75,00	41,42	35,16	34,66
5	60,00	31,95	28,05	27,73
6	50,00	25,99	23,33	23,10
7	42,86	21,90	19,97	19,80
8	37,50	18,92	17,45	17,33
9	33,33	16,65	15,50	15,40
10	30,00	14,87	13,94	13,86
11	27,27	13,43	12,67	12,60
12	25,00	12,25	11,61	11,55
13	23,08	11,25	10,71	10,66
14	21,43	10,41	9,94	9,90
15	20,00	9,68	9,28	9,24
16	18,75	9,05	8,70	8,66
17	17,65	8,50	8,18	8,15
18	16,67	8,01	7,73	7,70
19	15,79	7,57	7,32	7,30
20	15,00	7,18	6,95	6,93
21	14,29	6,82	6,62	6,60
22	13,64	6,50	6,32	6,30
23	13,04	6,21	6,04	6,03
24	12,50	5,95	5,79	5,78
25	12,00	5,70	5,56	5,55
26	11,54	5,48	5,34	5,33
27	11,11	5,27	5,15	5,13
28	10,71	5,08	4,96	4,95
29	10,34	4,90	4,79	4,78
30	10,00	4,73	4,63	4,62
31	9,68	4,57	4,48	4,47
32	9,38	4,43	4,34	4,33
33	9,09	4,29	4,21	4,20
34	8,82	4,16	4,08	4,08
35	8,57	4,04	3,97	3,96
36	8,33	3,93	3,86	3,85
37	8,11	3,82	3,75	3,75
38	7,89	3,72	3,65	3,65
39	7,69	3,62	3,56	3,55
40	7,50	3,53	3,47	3,47
41	7,32	3,44	3,39	3,38
42	7,14	3,36	3,31	3,30
43	6,98	3,28	3,23	3,22
44	6,82	3,20	3,15	3,15
45	6,67	3,13	3,08	3,08
46	6,52	3,06	3,02	3,01
47	6,38	2,99	2,95	2,95
48	6,25	2,93	2,89	2,89
49	6,12	2,87	2,83	2,83
50	6,00	2,81	2,78	2,77

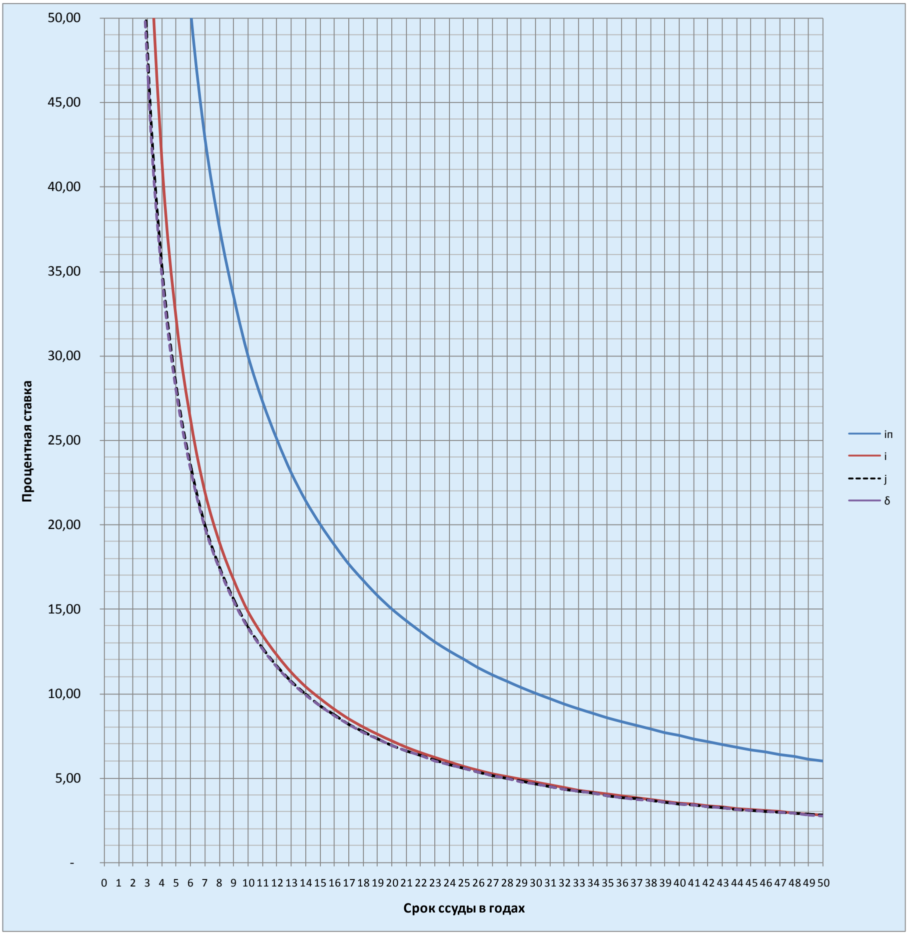


Рисунок 6 — Зависимость процентных ставок от срока ссуды (в годах) при дискретном дисконтировании (по простой, сложной эффективной и номинальной) и непрерывном дисконтировании

Тема 4: «Определение срока ссуды».

Провести расчеты срока ссуды ***n*** по формулам, приведенным выше и построить графики соответствующих функций.

Дано:

S = 100 у.е.

P = 25 у.е.

m = 12 раз в году.

Вычислить: срок ссуды для ставок (от 1 до 50 %) в случае простых процентов, сложных эффективных, номинальных и при непрерывном дисконтировании. Построить графики функций (рис. 7).

Решение:

ставка,%	$n(i_n)$	$n(i)$	$n(j)$	$n(\delta)$
1	300,00	139,32	138,69	138,63
2	150,00	70,01	69,37	69,31
3	100,00	46,90	46,27	46,21
4	75,00	35,35	34,72	34,66
5	60,00	28,41	27,78	27,73
6	50,00	23,79	23,16	23,10
7	42,86	20,49	19,86	19,80
8	37,50	18,01	17,39	17,33
9	33,33	16,09	15,46	15,40
10	30,00	14,55	13,92	13,86
11	27,27	13,28	12,66	12,60
12	25,00	12,23	11,61	11,55
13	23,08	11,34	10,72	10,66
14	21,43	10,58	9,96	9,90
15	20,00	9,92	9,30	9,24
16	18,75	9,34	8,72	8,66
17	17,65	8,83	8,21	8,15
18	16,67	8,38	7,76	7,70
19	15,79	7,97	7,35	7,30
20	15,00	7,60	6,99	6,93
21	14,29	7,27	6,66	6,60
22	13,64	6,97	6,36	6,30
23	13,04	6,70	6,08	6,03
24	12,50	6,44	5,83	5,78
25	12,00	6,21	5,60	5,55
26	11,54	6,00	5,39	5,33
27	11,11	5,80	5,19	5,13
28	10,71	5,62	5,01	4,95
29	10,34	5,44	4,84	4,78
30	10,00	5,28	4,68	4,62
31	9,68	5,13	4,53	4,47
32	9,38	4,99	4,39	4,33
33	9,09	4,86	4,26	4,20
34	8,82	4,74	4,13	4,08
35	8,57	4,62	4,02	3,96
36	8,33	4,51	3,91	3,85
37	8,11	4,40	3,80	3,75
38	7,89	4,30	3,71	3,65
39	7,69	4,21	3,61	3,55
40	7,50	4,12	3,52	3,47
41	7,32	4,03	3,44	3,38
42	7,14	3,95	3,36	3,30
43	6,98	3,88	3,28	3,22
44	6,82	3,80	3,21	3,15
45	6,67	3,73	3,14	3,08
46	6,52	3,66	3,07	3,01
47	6,38	3,60	3,01	2,95
48	6,25	3,54	2,95	2,89
49	6,12	3,48	2,89	2,83
50	6,00	3,42	2,83	2,77

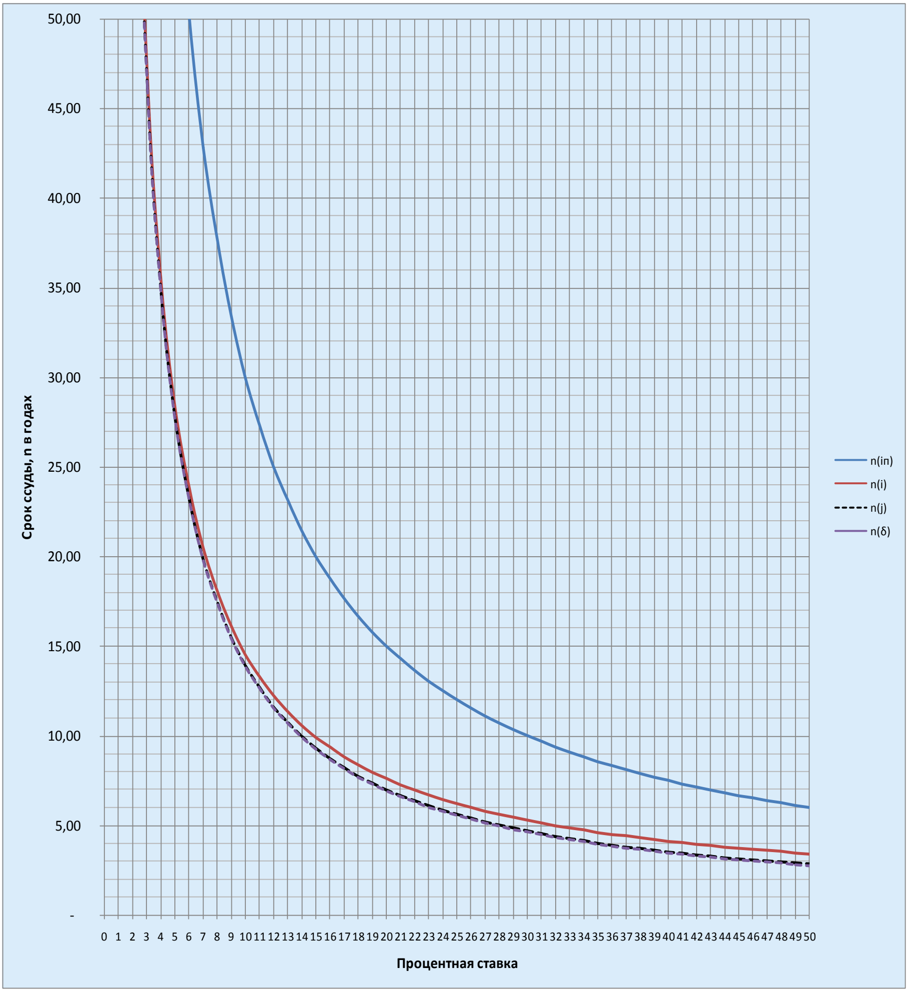


Рисунок 7 — Зависимость срока ссуды (в годах) от процентных ставок при дискретном дисконтировании (по простой, сложной эффективной и номинальной) и непрерывном дисконтировании

Тема 5: «Определение рентных платежей».

Провести расчеты рентных платежей R по формулам, приведенным выше и построить графики соответствующих функций.

Дано:

S = 10 000 у.е.

P = 100 у.е.

N = 5 лет

m = 12 раз в году

k = 1 коэф.(1 — пренумерандо, 0 — постнумерандо).

Вычислить: рентные платежи для ставок (от 1 до 50 %) в случае простых процентов, сложных эффективных, номинальных и при непрерывном дисконтировании. Построить графики функций (рис. 8).

Решение:

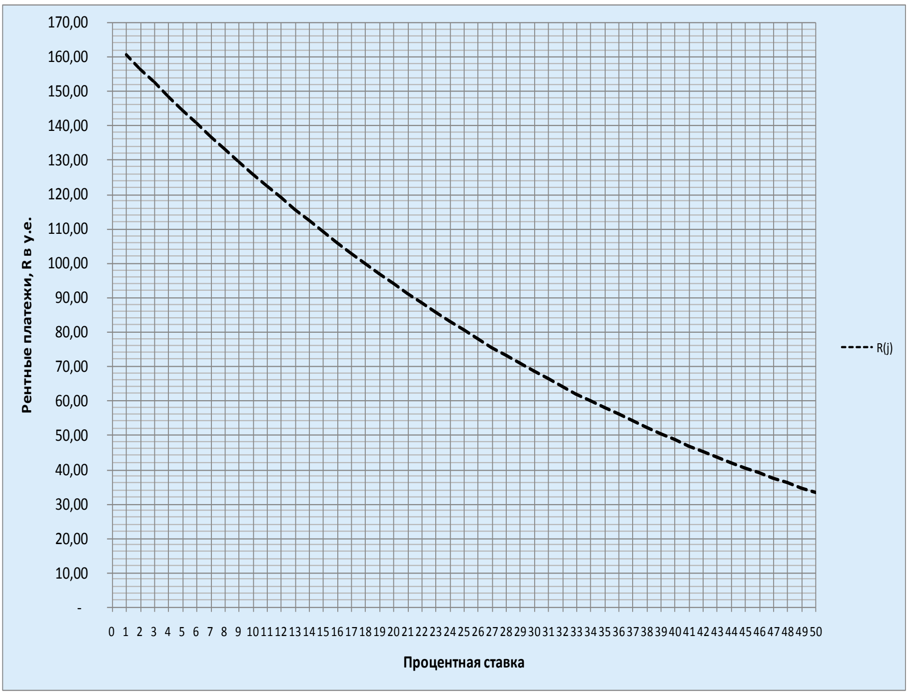


Рисунок 8 — Зависимость размера рентных платежей от сложных номинальных процентных ставок при дискретном дисконтировании

Задачи для самостоятельного решения

1. Клиент поместил в банк $ 4500 под ежемесячный процент по сложной ставке и через 6 лет $ 25 000. Какая номинальная ставка была определена банком при заключении договора?
2. Клиент поместил в Сбербанк 2000 руб. на 5 лет под ежемесячный %. Сумма на счете оказалась 22 000 рублей. Определить годовую ставку, если % начисляются ежемесячно с дополнительными ежемесячными вкладами 500 руб. (начисление вкладов постнумерандо) и без дополнительных вкладов?
3. Клиент поместил в сбербанк 5000 руб. на 5 лет под некоторый % годовых. Сумма на счете оказалась 100 000 рублей. Определить ставку процента, если % начисляются ежемесячно с дополнительными ежемесячными вкладами 1000 руб. (начисление вкладов постнумерандо)?
4. Клиент поместил в сбербанк 5000 руб. на 5 лет под некоторый % годовых. Сумма на счете оказалась 100 000 рублей. Определить ставку процента, если % начисляются ежемесячно с дополнительными ежемесячными вкладами 1000 руб. (начисление вкладов пренумерандо)?
5. Будущая стоимость денег на депозите через 5 лет оказалась 50 000 руб. при ежегодном начислении процентов. Начальная сумма 10 000 рублей. Определить годовая процентную ставку. Сделайте это по формуле и в Excel по формуле СТАВКА — сравните.
6. Будущая стоимость денег на депозите через 5 лет оказалась 50 000 руб. при ежегодном начислении процентов. Начальная сумма 10 000 рублей. Определить ежеквартальную процентную ставку. Сделайте это по формуле и в Excel по формуле СТАВКА — сравните.
7. Определите процентную годовую ставку, если будущая стоимость денег через 5 лет 1 000 000 руб. при непрерывном начислении процентов. Начальная сумма 10 000 рублей.
8. Клиент поместил в Сбербанк 5000 руб. на 5 лет под некоторый % годовых. Сумма на счете оказалась 100 000 рублей. Определить сумму постоянных дополнительных ежемесячные вкладов, если % начисляются ежемесячно по ставке 5 % (начисление вкладов постнумерандо)?
9. Клиент поместил в сбербанк 5000 руб. на 5 лет под некоторый % годовых. Сумма на счете оказалась 100 000 рублей. Определить сумму постоянных дополнительных ежемесячные вкладов, если % начисляются ежемесячно по ставке 5 % (начисление вкладов пренумерандо)?

10. Определить постоянную силу роста текущей стоимости 100 руб. от будущей стоимости 10 000 руб., получаемой через 7 лет при непрерывном дисконтировании годовых.
11. Фирма поместила в банк $ 45 000 под 10,5 % годовых. Через какой срок сумма оказалась на счете $ 100 000, если % начисляются ежегодно? Рассчитать срок накопления той же суммы при ежемесячном начислении процентов и при непрерывном.
12. Фирма поместила в банк $ 50 000. на 5 лет под 10 % годовых. Какую сумму ей необходимо добавлять ежемесячно, чтобы накопить сумму $ 200 000?
13. Рассчитать ежемесячную выплату по трехлетнему кредиту суммой $ 12 000 по ставке 6 % годовых. Поскольку выплаты будут производиться каждый месяц, необходимо привести процентную ставку из годового значения к месячному: 6 % / 12 = 0,5 %, или 0,005 в месяц.

Вопросы к разделу 2:

1. *Чем отличается простая процентная ставка от сложной?*
2. *Как рассчитать простую процентную ставку?*
3. *Как рассчитать простую учетную процентную ставку?*
4. *По какой формуле определяется сложная эффективная процентная ставка?*
5. *По какой формуле определяется сложная номинальная процентная ставка?*
6. *Как рассчитать сложную годовую учетную процентную ставку?*
7. *Как рассчитать сложную номинальную учетную процентную ставку?*
8. *Постоянная и переменная сила роста.*
9. *Вывод формулы наращения с постоянной силой роста.*
10. *Формула дисконтирования с постоянной силой роста.*
11. *Наращение и дисконтирование с переменной силой роста, изменяющейся по линейному закону.*
12. *Наращение и дисконтирование с переменной силой роста, изменяющейся по экспоненциальному закону.*
13. *Формулы определения постоянной силы роста.*
14. *Формулы определения переменной силы роста (по линейному и экспоненциальному закону).*
15. *Процентные спот-ставки и форвардные процентные ставки.*
16. *Понятие процентной ставки спот и формула ее определения.*
17. *Понятие форвардной процентной ставки. Формула для нахождения форвардных ставок.*

18. *Форвардные ставки при непрерывном наращении.*
19. *Формулы для определения срока ссуды при дискретном наращении (для различных видов ставок).*
20. *Формулы для определения срока ссуды при непрерывном наращении (через постоянную и переменную силу роста).*
21. *Потоки платежей. Разновидности потоков платежей.*
22. *Методика определения постоянных рентных платежей при дискретном наращении.*
23. *Что называется аннуитетом? Формула для расчета аннуитета.*
24. *Определение процентных ставок с учетом рентных платежей с использованием финансовых функций MS Excel.*

РАЗДЕЛ 3.
ОСНОВНЫЕ ФИНАНСОВЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ И ПРОЦЕССЫ

3.1. Облигации

Облигация (bond) — долгосрочное долговое обязательство (или ценная бумага), по которому выплачивается установленный процентный доход на протяжении определенного периода и в конце которого владельцу облигации выплачивается ее номинальная стоимость.

Оценка облигации — процесс определения рыночной стоимости ценной бумаги.

Формула оценки облигации с годовым начислением процентов:

$$B_{\text{о}} = \frac{F}{(1+YTM)^n} + \sum_{t=1}^{n} \frac{C}{(1+YTM)^t} \tag{56}$$

где $B_{\text{о}}$ — текущая цена облигации;
C — годовой купонный доход;
YTM — требуемая норма прибыли, доли от 1;
n — число лет до погашения облигации;
F — нарицательная стоимость, выплачиваемая при погашении облигации.

Формула оценки облигации с многократным внутригодовым начислением процентов:

$$B_{\text{о}} = \frac{F}{(1+\frac{YTM}{100m})^n} + \sum_{t=1}^{nm} \frac{\frac{C}{m}}{\left(1+\frac{YTM}{100m}\right)^t}\ , \tag{57}$$

где C — ежегодный купонный доход;
YTM — доход до срока погашения, %;
m — количество начислений за год;
F — номинальная (нарицательная) стоимость, выплачиваемая при погашении облигации (номинал облигации).

Пример 14.

Номинал облигации 10 000 рублей, доход по облигации 17 % (требуемая норма прибыли), номинальный доход 14 % (годовой купонный доход), срок погашения 8 лет. Оцените стоимость облигации.

Решение. 14 % номинальный доход соответствует ежегодным процентным выплатам в размере 1400 рублей

$$B_о = 1400 / (1 + 0{,}17) + 1400 / (1 + 0{,}17)^2 + 1400 / (1 + 0{,}17)^3 + \ldots$$
$$\ldots + 1400 / (1 + 0{,}17)^8 + 10000 / (1 + 0{,}17)^8 = 8737 \text{ рублей.}$$

Пример 15.

Номинал облигации 10 000 рублей , доход по облигации 11 % (требуемая норма прибыли), номинальный доход 14 % (годовой купонный доход), срок погашения 8 лет. Оцените стоимость облигации.

Решение. 14 % номинальный доход соответствует ежегодным процентным выплатам в размере 1400 рублей.

$$B_о = 1400 / (1 + 0{,}11) + 1400 / (1 + 0{,}11)^2 + 1400 / (1 + 0{,}11)^3 + \ldots$$
$$\ldots + 1400 / (1 + 0{,}11)^8 + 10000 / (1 + 0{,}11)^8 = 11543 \text{ рубля.}$$

В первом примере облигация продается с дисконтом, т. е. рыночная стоимость облигации уступает ее номинальной стоимости (требуемая норма прибыли больше годового купонного дохода).

Во втором примере облигация продается с премией, т. е. рыночная стоимость облигации превышает ее номинальную стоимость (требуемая норма прибыли меньше годового купонного дохода).

При увеличении уровня инфляции или повышения степени риска и т. д. увеличивается требуемая норма прибыли и вследствие этого уменьшается рыночная стоимость облигации. При уменьшении уровня инфляции или понижении степени риска и т. д. уменьшается требуемая норма прибыли и вследствие этого увеличивается рыночная стоимость облигации.

Облигации с более долгим сроком погашения являются наиболее рисковыми с точки зрения изменения рыночной стоимости облигации.

Чем меньше номинальный доход, тем больше изменение рыночной стоимости облигации, при таком же изменении требуемой нормы прибыли.

Бессрочная облигация (perpetuity annuity) — бесконечная рента, которая никогда не заканчивается, или поток платежей наличными, который продолжается всегда. *Бессрочная облигация* — одна из форм обычных аннуитетов (или рент). Они относятся к ценным бумагам с фиксированным уровнем дохода. Для расчета текущей рыночной стоимости облигации дисконтируют и суммируют денежные потоки образованные купонным доходом. Бессрочная облигация является аннуитетом, в котором периодические выплаты начинаются на фиксированную дату и продолжаются до бесконечности. Его иногда называют ***вечной рентой***. Ценность бессрочной облигации конечна, потому что у платежей, которые ожидаются далеко в будущем, есть чрезвычайно низкая текущая стоимость (текущая стоимость потоков будущей выручки). В отличие от обычной облигации, бессрочные никогда не погашаются, и нет приведенной стоимости для ее номинальной стоимости. Предполагая, что платежи начинаются в конце текущего периода, *цена бессрочной облигации* — просто сумма купонных платежей дисконтированных по соответствующей учетной ставке или доходности.

Соглашение, часто используемое в финансировании недвижимости для того, чтобы оценить недвижимое имущество по ставке капитализации. Используя эту ставку, ценность недвижимого имущества можно определить как отношение чистого дохода (например, сдача в аренду) к ставке капитализации. Иначе говоря, использование ставки капитализации при учете стоимости объекта недвижимости предполагает, что текущий доход от собственности продолжается до бесконечности. В основе этой оценки лежит предположение, что арендная плата будет расти теми же темпами, как инфляция. Хотя имущество может быть продано в будущем, предполагается, что другие инвесторы будут применять тот же подход к оценке имущества.

Формула оценки бессрочной облигации:

$$B_{\text{о}} = \frac{100C}{r}, \tag{58}$$

где $B_{\text{о}}$ — текущая цена облигации;
C — годовой купонный доход, в рублях;
r — требуемая норма прибыли.

Формула оценки бессрочной облигации с многократным внутригодовым начислением процентов:

$$B\text{о} = \frac{\frac{C}{m}}{\sqrt[m]{1 + \frac{r}{100} - 1}}, \tag{59}$$

где r — требуемая норма прибыли, % годовых;
m — количество начислений за год.

Пример 16.

Доход по облигации 120 руб., номинальный доход 14 % (годовой купонный доход), срок погашения — бессрочный. Оцените стоимость бессрочной облигации.

Решение. Текущая цена облигации: $B_o = 120 \cdot 100 / 14 = 857{,}14$ рублей.

Облигации с более долгим сроком погашения являются более рисковыми с точки зрения изменения рыночной стоимости облигации.

Бессрочные облигации приобретаются для увеличения *дюрации* своих инвестиций.

3.2. Дюрация

Если имеется несколько альтернативных проектов с одинаковыми (близкими) значениями параметров NPV — чистая текущая стоимость, IRR — внутренняя норма доходности, то при выборе окончательного варианта инвестирования учитывается длительность инвестиций.

Дюрация (D) — это средневзвешенный срок жизненного цикла инвестиционного проекта, где в качестве весов выступают текущие стоимости денежных потоков, получаемых в период n, или другими словами, как точку равновесия сроков дисконтированных платежей. Она позволяет привести к единому стандарту самые разнообразные по своим характеристикам проекты (по срокам, количеству платежей в периоде, методам расчета причитающегося процента).

Основным моментом здесь является не то, как долго каждый инвестиционный проект будет приносить доход, а то, когда он будет приносить доход и сколько поступлений дохода будет (каждый месяц, квартал или год) на протяжении всего срока его действия.

Дюрация измеряет среднее время жизни инвестиционного проекта или его эффективное время действия. В результате менеджеры получают сведения о том, как долго окупаются для компании инвестиции доходами, приведенными к текущей дате.

Для расчета дюрации (D) используется следующая формула:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{n} tP_t}{\sum_{t=1}^{n} P_t}\ ;\ P_t = \frac{S_t}{(1+r)^t}\,, \qquad (60)$$

где D — дюрация;

S_t — приток денежных средств в период t;

P_t — текущая стоимость доходов за n периодов до окончания срока действия проекта;

r — барьерная ставка (коэффициент дисконтирования);

t — периоды поступления доходов 1*,* 2, ... *, n*;

n — число периодов.

Дюрация:

- *Определяется:* как средневзвешенный срок жизненного цикла инвестиционного проекта.
- *Характеризует:* финансовый риск.
- *Синонимы:* средневзвешенный срок погашения, средневзвешенная продолжительность платежей, Duration.
- *Недостатки:* не учитывает размер инвестиции, не определяется при знакопеременных денежных потоках.
- *Критерий приемлемости: D → min* (чем короче, тем лучше).
- *Условия сравнения:* любой срок действия инвестиции и размер.

Пример 17.

Размер инвестиции — $ 115 000. Доходы от инвестиций в первом году: 32000$; втором году: $ 41 000; третьем году: $ 43 750; четвертом году: $ 38 250. Размер барьерной ставки — 9,2%

Решение. Пересчитаем денежные потоки в вид текущих стоимостей:

P_1 = 32 000 / (1 + 0,092) = $ 29 304,03;

P_2 = 41 000 / $(1 + 0{,}092)^2$ = $ 34 382,59;

P_3 = 43 750 / $(1 + 0{,}092)^3$ = $ 33 597,75;

P_4 = 38 250 / $(1 + 0{,}092)^4$ =$ 26 899,29;

D = (1 · 29 304,03 + 2 · 34382,59 + 3 · 33 597,75 + 4 · 26 899,29) / (29 304,03 + …

…+ 34 382,59 + 33 597,75 + 26 899,29) = 2,4678.

Ответ: дюрация равна 2,47 периода.

Пример 18.

Выбор по параметру дюрация, при близких значениях NPV и IRR.

Денежный поток 1: –4000 1000 2000 4000. r = 10 %.

Денежный поток 2: –4000 3000 2000 1000. r= 10 %.

Сравните два денежных потока по сроку окупаемости.

Решение.

Дюрация для 1-го потока: 2,331; 2-го: 1,614.

NPV для 1-го потока: 1191; 2-го: 1131.

IRR для 1-го потока: 23,22 %; 2-го: 28,86 %.

Ответ: Т. к. для второго проекта дюрация значительно меньше, чем у первого, при близких значениях NPV и IRR, то принимается второй проект.

Формула для расчета дюрации (D) с учетом переменной барьерной ставки:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{n} t P_t}{\sum_{t=1}^{n} P_t} \; ; \; P_t = \frac{S_t}{\prod_{i=1}^{t} (1 + r_i)} \, , \qquad (61)$$

где D — дюрация;

P_t — текущая стоимость доходов за n периодов до окончания срока действия проекта;

S_t — приток (или отток) денежных средств в период t;

r_i — барьерная ставка (ставка дисконтирования), доли единицы (при практических расчетах вместо $(1 + r)^t$ применяют $1 + r_0) \cdot (1 + r_1) \cdot \ldots$ $\ldots \cdot (1 + r_t)$, т. к. барьерная ставка может сильно меняться из-за инфляции и других составляющих);

n — суммарное число периодов (интервалов, шагов) $t = 1, 2, \ldots, n$.

3.3. Простой вексель

Векселя применяют для получения дохода от размещения временно свободных средств, повышения сервиса при взаиморасчете с партнерами, как один из возможных вариантов защиты от инфляции и т. д.

Вексель (Bill) — письменное долговое обязательство, выдаваемое заемщиком денег (векселедателем) своему кредитору (векселедержателю) и удостоверяющее право последнего требовать по истечении определенного срока уплаты векселедателем денежной суммы, указанной в реквизитах векселя. Вексель имеет строго установленную законом форму: выписывается на специальном бланке и содержит определенный набор реквизитов. Несоответствие установленной форме лишает вексель юридической силы.

Формулы для расчета операции по учету векселей банком:

Формула будущей стоимости векселя к погашению:

$$S = P\left(1 + \frac{r}{100}\right) \frac{t}{T} \, . \qquad (62)$$

Формула срочной стоимости векселя в момент учета банком:

$$P1 = P\left(1 + \frac{r}{100} \, \frac{t_u}{T}\right) . \qquad (63)$$

Формула выплачиваемой банком суммы в обмен на вексель:

$$P1 = S\left(1 - \frac{r_b}{100}\,\frac{t - t_u}{T}\right). \tag{64}$$

Обозначения в формулах (62)–(64):

P — стоимость векселя в момент его оформления (номинальная стоимость);

r — процентная ставка уплачиваемая векселедателем, %;

r_b — дисконтная ставка по которой вексель учитывается банком, %;

t — срок действия векселя в днях (время от момента оформления до погашения векселя); t_u — срок между оформлением и учетом векселя в днях;

T — продолжительность года в днях;

S — будущая стоимость векселя к погашению;

$P1$ — срочная стоимость векселя в момент учета банком;

$P2$ — выплачиваемая банком сумма в обмен на вексель.

Дисконтная ставка банка больше процентной ставки на которую выдан вексель на размер комиссионных за предоставленную услугу, в которую входит: плата за учет, взятие на себя риска непогашения, риска изменения уровня инфляции, соотношения с другими валютами и т. д.

Чем больше значение процентной ставки, тем быстрее увеличивается стоимость векселя. Стоимость векселя в момент погашения рассчитывается аналогично простым процентам (62). Теоретическая стоимость векселя в момент учета рассчитывается так же аналогично простым процентам (63).

Выплачиваемая банком сумма ($P2$) меньше теоретической стоимости векселя ($P1$) из-за комиссионных, получаемых банком за услугу, оказываемую векселедержателю по более раннему получению наличных средств.

В момент погашения векселя векселедателем банк получает проценты, накопившиеся с момента учета векселя, рассчитываемые как $S - P1$. Суммарная прибыль банка ($П$) будет состоять из комиссионных и процентов: $S - P2$. Недополученный доход векселедателя составит разницу между теоретической стоимостью векселя в момент учета и предложенной банком суммой ($P1 - P2$), что будет соответствовать разнице между процентной ставкой и дисконтной ставкой предложенной банком.

Пример 19.

Определите сумму, которую предложит банк за простой вексель номинальной стоимостью в 1 млн рублей, выпущенный в обращение 15 января 2012 г. по схеме обыкновенных процентов с точным числом дней, если срок погашения 3 июня 2012 г., процентная ставка 19,25 %, дисконтная ставка банка 23,75 % и время когда решили учесть вексель 1 марта 2012 года. Сколько получит средств банк в результате данной операции?

Решение. Определим время с момента оформления до момента погашения векселя:

$$t = 16 + 29 + 31 + 30 + 31 + 3 = 140 \text{ дней.}$$

Определим будущую стоимость векселя к погашению:

$$S = 1\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}1925 \cdot 140 / 360) = 1\,074\,861 \text{ рубль.}$$

Определим время с момента оформления до момента учета векселя:

$$t_u = 16 + 29 + 1 = 46 \text{ дней.}$$

Определим срочную стоимость векселя в момент учета банком:

$$P1 = 1\,000\,000 \cdot (1 + 0{,}1925 \cdot 46 / 360) = 1\,024\,597 \text{ рублей.}$$

Рассчитаем предлагаемую банком сумму:

$$P2 = 1\,074\,861 \cdot (1 - 0{,}2375 \cdot (140 - 46) / 360) = 1\,008\,205 \text{ рублей.}$$

Банк заработает на этой сделке:

$$П = 1\,074\,861 - 1\,008\,205 = 66\,657 \text{ рублей.}$$

Ответ: Банк предложит за вексель 1 008 205 рублей и получит при погашении векселя 66 657 рублей.

3.4. Инфляционные процессы

Изменение покупательской способности денег, в сторону некоторого обесценивания денег (инфляции), за некоторый период измеряется с помощью индекса покупательской способности $I_{\text{ПС}}$ или обратной величины индекса цен $I_{\text{Ц}}$. Цена при инфляции (C) для текущей суммы денег (S) определяется по формуле

$$C = S\, I_{\text{ПС}}\, ; I_{\text{ПС}} = \frac{1}{I_{\text{Ц}}}\,. \tag{65}$$

Под темпом инфляции понимается относительный прирост цен за период (h), который измеряется в %.

$$h = 100\,\left(I_{\text{Ц}} - 1\right). \tag{66}$$

Из формулы (66) индекс цен $I_{\text{Ц}} = 1 + \frac{h}{100}$.

Например, если темп инфляции равен 120 % , то цены за этот период выросли в 2,2 раза.

Среднегодовые темп роста цен ($h_{Ц}$) и темп инфляции (h) находятся на основе величины $I_{Ц}$:

$$h_{Ц} = \sqrt[n]{I_{Ц}}\ ; \tag{67}$$

$$h = 100\left(\sqrt[n]{I_{Ц} - 1}\right). \tag{68}$$

Поскольку инфляция является цепным процессом (цены в текущем периоде, повышаются на h_t % относительно уровня, сложившегося в предыдущий период), то *индекс цен* за несколько таких периодов равен произведению цепных индексов цен:

$$I_{Ц} = \prod_{t=1}^{n}(1 + h_t)\,. \tag{69}$$

Если h — постоянный ожидаемый (или прогнозируемый) темп инфляции за период, то за n таких периодов получим:

$$I_{Ц} = \left(1 + \frac{h}{100}\right)^n. \tag{70}$$

Рассмотрим проблему обесценивания денег при их наращении. В общем случае:

$$C = \frac{S}{I_{Ц}}\,. \tag{71}$$

При наращении по простой ставке, имеем:

$$C = P\frac{1 + ni_{П}}{I_{Ц}} = P\frac{1 + ni_{П}}{\left(1 + \frac{h}{100}\right)^n}\,. \tag{72}$$

Увеличение наращенной суммы с учетом сохранения покупательной способности денег имеет место тогда, когда $(1 + ni_{П}) > I_{Ц}$.

При наращении по сложным процентам

$$C = P\frac{(1+i)^n}{I_{\text{Ц}}} = P\left(\frac{1+i}{1+\frac{h}{100}}\right)^n. \tag{73}$$

Если $\frac{h}{100} < i$ происходит малый рост. Ставка по простым процентам, которая только компенсирует инфляцию в (72) определяется по уравнению:

$$i_{\text{П}}^{*} = \frac{(I_{\text{Ц}} - 1)}{n}. \tag{74}$$

Для сложных процентов в (73) компенсирующее значение

$$i^{*} = \frac{h}{100}. \tag{75}$$

Ставку, превышающую i^*, называют ***положительной ставкой процента***.

3.5. Оценка эффективности инвестиций

Инвестиционная деятельность присуща практически любой компании (или фирме), действующей в экономическом пространстве стран с рыночной экономикой. Чтобы выстоять в конкурентной борьбе компания должна постоянно направлять средства (свои и заемные) на закупку материальных ценностей, необходимых для обновления, усовершенствования, расширения и диверсификации производства. Инвестиции могут быть самые разнообразные — от вложений капитальных ресурсов в ремонт выходящего из строя оборудования до приобретения целых предприятий. Прежде чем осуществить инвестицию, компания должна оценить все ее финансовые последствия. Такая оценка проводится в рамках планирования инвестиций. Рассмотрим основные показатели для оценки эффективности инвестиций.

Показатель внутренней нормы доходности

Внутренняя норма доходности характеризует величину чистой прибыли (чистого валового дохода), приходящуюся на единицу инвестиционных вложений, получаемой инвестором в каждом временном интервале жизненного цикла проекта. Методически расчет *показателя внутренней нормы доходности* (IRR) осуществляется из следующих соотношений:

$$\sum_{t=0}^{T}\frac{D_t}{(1+\mathrm{IRR})^t}=\sum_{t=0}^{T}\frac{IC_t}{(1+\mathrm{IRR})^t}\,. \tag{76}$$

где D_t — доход предприятия в t-м временном интервале;

IC_t — инвестиционные вложения в t-м временном интервале, которые принимаются по проекту с учетом инфляции национальной валюты;

IRR — показатель внутренней нормы доходности за временной интервал в долях от единицы;

t — текущий временной интервал, принимающий значение от 0 до T;

T — длительность жизненного цикла проекта, исчисляемая в принятых временных интервалах.

Показатель внутренней нормы доходности применяется очень широко на многих предприятиях и многими инвесторами. Но особенно важное значение он имеет для крупных производств, для масштабных проектов, при реализации которых оценивается их стратегичность и растянутость жизненного цикла, в течение которого проект будет приносить большой доход.

Показатель чистого приведенного дохода

Величина этого показателя (NPV) определяется по формуле:

$$\mathrm{NVP}=\sum_{t=0}^{T}\frac{D_t}{(1+q_{\text{н}})^t}-\sum_{t=0}^{T}\frac{IC_t}{(1+q_{\text{н}})^t}>0, \tag{77}$$

где NPV — чистый приведенный доход за жизненный цикл проекта;

$q_н$ — норматив дисконтирования затрат и результатов проекта, принимаемый на момент начала его жизненного цикла;

$$q_н = q_г + q_с + q_0\,, \tag{78}$$

где $q_г$ — гарантированная норма получения дивидендов на вложенный капитал в высоконадежном банке (в долях от единицы);

$q_с$ — страховая норма, учитывающая риск вложения (в долях от единицы);

q_0 — минимальная граница доходности проекта (в долях от единицы), которая может устроить предпринимателя.

Рассматриваемый показатель имеет достаточно широкое распространение на предприятиях среднего бизнеса, в ограниченных случаях — крупного и малого бизнеса.

Показатель срока окупаемости инвестиций

Одним из важнейших показателей эффективности инвестиций для предприятий малого бизнеса является срок окупаемости вложений (T), ибо предпринимателю, не обладающему большим денежным капиталом, очень важно как можно быстрее вернуть внесенные в дело средства.

Показатель срока окупаемости (T) определяется по формуле:

$$\sum_{t=0}^{T} \frac{IC_t}{(1+q_{\text{н}})^t} = \sum_{t=0}^{T} \frac{D_t}{(1+q_{\text{н}})^t}\,. \qquad (79)$$

Пример 20.

Сравните два варианта инвестирования.

Первый вариант: сумма в 100 000 руб. кладется на счет в банке по схеме сложных процентов на 3 года под 10 % годовых.

Второй вариант: на всю сумму покупается пакет акций, цена пакета также 100 000 руб. в конце первого года дивиденды и рост стоимости пакета составил 13 800 руб., в конце второго: 11 400 руб., в конце третьего: 16 300 руб., плюс 100 000 руб. от продажи акций. Полученный доход помещался в банк на депозит под 4 % годовых.

Решение. Определим текущую стоимость, для первого варианта, по формуле сложных процентов:

$$P_1 = 100\,000 \cdot 1 + (10/100)^3 - 100\,000 = 33\,100 \text{ рублей.}$$

Для второго варианта просто сложим полученный доход:

$$P_2 = -100\,000 + 13800 + 11\,400 + 116\,300 = 41\,500 \text{ рублей.}$$

Для того, чтобы узнать на сколько больше будет прибыль во втором варианте, с учетом барьерной ставки (в данном случае 10 %) и уровня реинвестирования (4 %) определим значение модифицированной чистой текущей стоимости:

$$\text{MNPV} = 13\,800 \cdot (1+4/100)^2 / 1{,}1^3 + 11\,400 \cdot (1+4/100)^1 / 1{,}1^3 + 116\,300 \cdot \ldots$$

$$\ldots \cdot (1+4/100)^0 / 1{,}1^3 - 100\,000 = 13800 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}04 / 1{,}331 + 11400 \cdot 1{,}04 / \ldots$$

$$\ldots / 1{,}331 + 116\,300 \cdot 1 / 1{,}331 - 100\,000 = 7\,499{,}68 \text{ рублей.}$$

Ответ: Прибыль во втором варианте будет больше на 7499,68 рублей.

Пример 21.

Сравните два проекта (1 и 2) по критериям чистый приведенный эффект (NPV) и внутренняя норма прибыли (IRR), если цена капитала 15 %. В проект 1 вкладываем (инвестируем) 20 тыс. руб. и ежегодно в течении 15 лет получаем дивиденды по 5 тыс. рублей. В проект 2 инвестируем 40 тыс. рублей. В первый год получаем дивиденды 3.тыс. руб., во второй год 5 тыс. руб. и т. д. с нарастанием каждый год на 2 тыс. руб., в течение 15 лет.

Решение.

Для определения (NPV) для проекта 1 и 2 используем формулу (77). Решение получаем в MS Excel (рис. 9).

	A	B	C	D	E
1	$q_н$= 0,15				
2					
3	t	1 проект	2 проект	1 проект	2 проект
4		дивиденды	дивиденды	формула	формула
5	0			-20000,00	-40000,00
6	1	5000	3000	4347,83	2608,70
7	2	5000	5000	3780,72	3780,72
8	3	5000	7000	3287,58	4602,61
9	4	5000	9000	2858,77	5145,78
10	5	5000	11000	2485,88	5468,94
11	6	5000	13000	2161,64	5620,26
12	7	5000	15000	1879,69	5639,06
13	8	5000	17000	1634,51	5557,33
14	9	5000	19000	1421,31	5400,99
15	10	5000	21000	1235,92	5190,88
16	11	5000	23000	1074,72	4943,69
17	12	5000	25000	934,54	4672,68
18	13	5000	27000	812,64	4388,25
19	14	5000	29000	706,64	4098,53
20	15	5000	31000	614,47	3809,73
21			**NPV:**	**9236,85**	**30928,15**

Рисунок 9 — Расчет NPV для 1-го и 2-го проектов

Для определения (IRR) для проекта 1 и 2 используем формулу (76). Расчет проводим в среде MS Excel с использованием функции «Подбор параметра». Представляем (76) как функцию F(IRR) = 0, вычитая правую часть уравнения из левой части и приравнивая 0. Для 1 проекта изменяемая ячейка D19, для 2-го E19 (рис. 10). Функция цели со значением «0» для первого проекта D20, 2-го E20.

	A	B	C	D	E
1	t	1 проект	2 проект	1 проект	2 проект
2		дивиденды	дивиденды	формула	формула
3	0			-20000,00	-40000,00
4	1	5000	3000	4031,97	2415,97
5	2	5000	5000	3251,36	3242,74
6	3	5000	7000	2621,88	3656,04
7	4	5000	9000	2114,27	3785,53
8	5	5000	11000	1704,93	3726,04
9	6	5000	13000	1374,85	3546,25
10	7	5000	15000	1108,67	3295,25
11	8	5000	17000	894,02	3007,58
12	9	5000	19000	720,94	2707,03
13	10	5000	21000	581,36	2409,52
14	11	5000	23000	468,80	2125,25
15	12	5000	25000	378,04	1860,34
16	13	5000	27000	304,85	1618,03
17	14	5000	29000	245,83	1399,57
18	15	5000	31000	198,24	1204,84
19			**IRR:**	**0,2401**	**0,2417**
20			**F(IRR):**	**0,00**	**0,00**

Рисунок 10 — Расчет IRR для 1-го и 2-го проектов

По чистому приведенному эффекту (NPV) и внутренней норме прибыли (IRR) инвестирование 2-го проекта эффективнее.

Задания для самостоятельной работы

Мы рассмотрели основные формулы для определения различных процентных ставок, сроков ссуды и рентных платежей. Выполним самостоятельно некоторые расчеты в приложении MS Excel по темам.

Тема 6: «Оценка облигаций».

Провести расчеты различных облигаций по формулам (56) и (57), приведенным выше и построить графики соответствующих функций изменения текущей цены облигации B_o(YTM) от изменяемой нормы прибыли YTM. В первом случае (вариант 1) для облигации с годовым начислением процентов, во втором — для облигации с многократным внутригодовым начислением процентов (вариант 2).

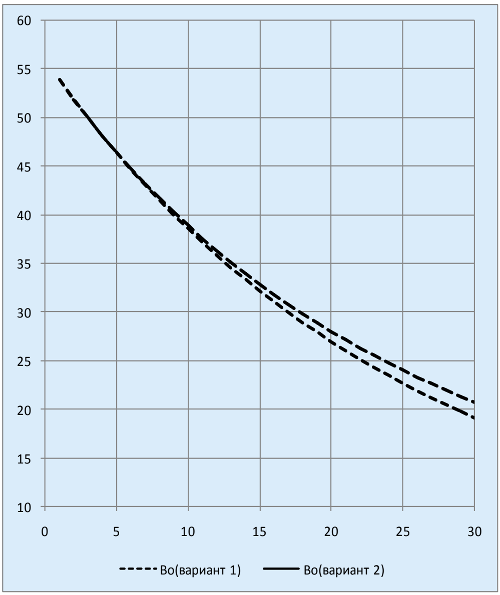
Дано:

Параметры	Единица измерения	Вариант 1	Вариант 2
F	в тыс. руб.	50	50
C	в тыс. руб.	1,5	1,5
n	в годах	4	4
YTM	%	0 до 30	0 до 30
m	целое	—	4

Решение:

YTM,%	Bo(вариант 1)	Bo(вариант 2)
1	53,902	53,916
2	51,904	51,917
3	50,000	50,000
4	48,185	48,160
5	46,454	46,395
6	44,802	44,701
7	43,226	43,075
8	41,720	41,514
9	40,281	40,016
10	38,905	38,577
11	37,590	37,195
12	36,332	35,869
13	35,128	34,595
14	33,975	33,371
15	32,870	32,195
16	31,812	31,065
17	30,797	29,979
18	29,825	28,936
19	28,891	27,934
20	27,996	26,970
21	27,136	26,043
22	26,310	25,152
23	25,517	24,296
24	24,755	23,472
25	24,022	22,680
26	23,318	21,918
27	22,640	21,185
28	21,988	20,479
29	21,360	19,801
30	20,756	19,147

a



b

Рисунок 11 — Расчетная таблица для оценки облигаций (*a*) и график (*b*) зависимости стоимости облигации (в тыс. руб.) от изменяемой нормы прибыли (в %) для двух вариантов

Задачи для самостоятельного решения

1. Номинал облигации 5000 руб., доход по облигации 18 % (требуемая норма прибыли), номинальный доход 15 % (годовой купонный доход), срок погашения 10 лет. Оцените стоимость облигации.
2. Доход по облигации 1100 руб., номинальный доход 16 % (годовой купонный доход), срок погашения — бессрочный. Оцените стоимость бессрочной облигации.
3. Размер инвестиции — $ 225 000. Доходы от инвестиций в первом году: 22 000$; втором году: $ 43 000; третьем году: $ 48 000; четвертом году: 28 000$. Размер барьерной ставки — 10,5 %. Определить дюрацию.
4. Фирма реализовала товар в кредит с оформлением простого векселя номинальной стоимостью 3,2 млн руб., выпущенный в обращение 2 октября 2010 г. по схеме обыкновенных процентов с точным числом дней, со сроком погашения 12 января 2012 г., процентной ставкой за кредит 18,5 %. Через 60 дней векселедержатель обратился в банк для проведения операции по учету векселя. Банк предложил учесть вексель по дисконтной ставке равной 21 %. Определите сумму полученную фирмой и сколько получит средств банк в результате данной операции?
5. Фирма предъявила для учета вексель на сумму 4550 тыс. руб. со сроком погашения 2 ноября 2010 года. Вексель предъявлен 29 ноября 2010 г. Банк предложил учесть вексель по учетной ставке 25,5 % годовых. Определите выплаченную банком сумму.
6. Определите сумму, которую предложит банк за простой вексель номинальной стоимостью в 0,5 млн руб., выпущенный в обращение 1 января 2012 г. по схеме обыкновенных процентов с точным числом дней, если срок погашения 5 июля 2012 г., процентная ставка 20 %, дисконтная ставка банка 24 % и время когда решили учесть вексель 5 марта 2012 года. Сколько получит средств банк в результате данной операции?
7. В проект вкладываем (инвестируем) 30 тыс. руб. и ежегодно в течение 10 лет получаем дивиденды по 3 тыс. рублей. Найти приведенный эффект (NPV) и внутреннюю норму прибыли (IRR), если цена капитала 25 %.

Вопросы к разделу 3:

1. *Какой финансовый инструмент определяет облигация?*
2. *Суть оценки облигации. Формула оценки облигации с годовым начислением процентов.*
3. *Формула оценки облигации с многократным внутригодовым начислением процентов.*

4. *Бессрочная облигация. Смысл финансового инструмента. Формула оценки бессрочной облигации.*
5. *Вечная рента. Основные характеристики.*
6. *Оценка бессрочной облигации с многократным внутригодовым начислением процентов.*
7. *Определение дюрации и ее основные характеристики. Отношение дюрации к инвестиционному проекту.*
8. *Формула расчета дюрации.*
9. *Формула для расчета дюрации с учетом переменной барьерной ставки.*
10. *Охарактеризуйте применение простого векселя в финансовых операциях.*
11. *Формулы для расчета финансовых операций по учету векселей банком.*
12. *Суть инфляции и параметры, характеризующие инфляционные процессы.*
13. *Основные виды и характеристики инвестиций.*
14. *Определение показателя внутренней нормы доходности. Численный метод определения показателя внутренней нормы доходности.*
15. *Показатель чистого приведенного дохода и формула его определения.*
16. *Срок окупаемости инвестиций и формула для его определения.*

РАЗДЕЛ 4.
ОПИСАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Основная задача практических занятий:

- Показать знания, полученные в лекциях по формулам наращения и дисконтирования (основные определения и понятия финансовой математики, вывод формул).
- Научиться пользоваться основными финансовыми функциями.
- Проверить эти функции формулами из лекций или полученных выводом из основных формул.
- Оформить полученные варианты заданий в виде отчета с описанием формулировки и решения задач, а также с описанием финансовых инструментов и параметров (определения и понятия) используемых в расчетах.

В конце занятия каждому будет выставлена ***первая оценка*** по 100-балльной системе по результатам защиты лабораторной работы (в Excel) с пояснениями и ответами на вопросы. ***Вторая оценка*** будет выставлена за отчет по работе, выполненный в Word (здесь или дома), и представленный в бумажном или электронном виде преподавателю до зачета. Без выполнения этих работ нет допуска к зачету.

Рассмотрим 5 основных финансовых функции в Excel: БС, ПС, ПЛТ, КПЕР и СТАВКА.

Параметры **Функция**						**Формула**
БС — будущая стоимость (наращение), S		m				$S = P \cdot q^{nm} + R \cdot (1+ik)\dfrac{q^{nm}-1}{i}$, *где* $q = 1+i$.
ПС — текущая (современная) стоимость (дисконтирование), P		m				*Вывести формулу*
ПЛТ — размер периодических выплат, R	i	nm	R	P	k	*Вывести формулу*
КПЕР — количество периодических выплат, nm	i	R	S	P	k	*Вывести формулу*
СТАВКА — расчет номинальной ставки, j	S	nm	R	P	k	*Вывести формулу* *(итерационный метод поиска через функцию Excel «Подбор параметра» при* $R \neq 0$*)*

В таблице: i — процентная ставка за период, ($i = j / m$, j — номинальная процентная ставка); m — количество промежуточных выплат за год; n — срок финансового обязательства (в годах); k — число 0 или 1, обозначающее, когда должна производиться выплата. 0 или опущен — в конце периода (постнумерандо), 1 — в начале периода (пренумерандо).

При создании формулы следует устанавливать одинаковую размерность периода для процентной ставки и числа платежей. Например, если платежи производятся один раз в год, то и процентная ставка должна быть дана в годовом исчислении, а если платежи производятся ежемесячно, то должна быть задана месячная процентная ставка.

Все аргументы, означающие денежные средства, которые должны быть выплачены (например, сберегательные вклады), представляются отрицательными числами (для финансовых функций MS Excel); денежные средства, которые должны быть получены (например, дивиденды), представляются положительными числами.

При создании формулы не обязательно указывать все аргументы функции. Вместо отсутствующего аргумента в строке формул должна быть точка с запятой.

Далее представлены варианты практических занятий.

Вариант № 1
по теме: «Наращение и дисконтирование»

1. Рассчитать сумму вклада *S* (величину займа) по БС и формуле

Параметры функции						Расчет функции *S*		Вид формулы
i, %	***n***	***m***	***R, руб.***	***P, руб.***	***k***	**по БС**	**по формуле**	
5	3	1	500	5000	0	?	?	$S = ?$

2. Рассчитать стоимость инвестиции *P* по ПС и формуле

Параметры функции						Расчет функции *P*		Вид формулы
i, %	***n***	***m***	***R, руб.***	***S, руб.***	***k***	**по ПС**	**по формуле**	
5	3	1	500	10000	0	?	?	$P = ?$

3. Расчет процентных платежей *R* по ПЛТ и формуле

Параметры функции						Расчет функции *R*		Вид формулы
i, %	***n***	***m***	***S, руб.***	***P, руб.***	***k***	**по ПЛТ**	**по формуле**	
5	3	1	10 000	500	0	?	?	$R = ?$

4. Расчет продолжительности платежей (при $m = 1$) или количества периодических выплат *N* по КПЕР и формуле

Параметры функции						Расчет функции $N = nm$		Вид формулы
i, %	***S, руб.***	***m***	***R, руб.***	***P, руб.***	***k***	**по КПЕР**	**по формуле**	
5	30 000	1	500	5000	0	?	?	$N = ?$

5. Расчет ставки по СТАВКА и формуле

Параметры функции						Расчет функции *i*		Вид формулы
S, руб.	***m***	***n***	***R, руб.***	***P, руб.***	***k***	**по СТАВКА**	**по формуле**	
30 000	1	2	500	5000	0	?	?	$j = ?$

Вариант № 2
по теме: «Наращение и дисконтирование»

1. Рассчитать сумму вклада *S* (величину займа) по БС и формуле

Параметры функции						**Расчет функции *S***		**Вид формулы**
j, %	***n***	***m***	***R, руб.***	***P, руб.***	***k***	**по БС**	**по формуле**	
5	3	4	200	0	1	?	?	*S* = ?

2. Рассчитать стоимость инвестиции Р по ПС и формуле

Параметры функции						**Расчет функции *P***		**Вид формулы**
j, %	***n***	***m***	***R, руб.***	***S, руб.***	***k***	**по ПС**	**по формуле**	
7	2	6	0	50 000	1	?	?	*P* = ?

3. Расчет процентных платежей *R* по ПЛТ и формуле

Параметры функции						**Расчет функции *R***		**Вид формулы**
j, %	***n***	***m***	***S, руб.***	***P, руб.***	***k***	**по ПЛТ**	**по формуле**	
7	2	6	50000	0	1	?	?	*R* = ?

4. Расчет продолжительности платежей (при $m = 1$) или количества периодических выплат *N* по КПЕР и формуле

Параметры функции						**Расчет функции $N = nm$**		**Вид формулы**
i, %	***S, руб.***	***m***	***R, руб.***	***P, руб.***	***k***	**по КПЕР**	**по формуле**	
6	25 000	1	400	3000	1	?	?	*N* = ?

5. Расчет ставки по СТАВКА и формуле

Параметры функции						**Расчет функции *i***		**Вид формулы**
S, руб.	***m***	***n***	***R, руб.***	***P, руб.***	***k***	**по СТАВКА**	**по формуле**	
25 000	1	3	400	3000	1	?	?	*j* = ?

Вариант № 3
по теме: «Наращение и дисконтирование»

1. Рассчитать сумму вклада S (величину займа) по БС и формуле

Параметры функции						**Расчет функции S**		**Вид формулы**
j, %	***n***	***m***	***R, руб.***	***P, руб.***	***k***	**по БС**	**по формуле**	
5	3	12	0	8000	0	?	?	$S = ?$

2. Рассчитать стоимость инвестиции P по ПС и формуле

Параметры функции						**Расчет функции P**		**Вид формулы**
j, %	***n***	***m***	***R, руб.***	***S, руб.***	***k***	**по ПС**	**по формуле**	
8	1	12	100	40 000	0	?	?	$P = ?$

3. Расчет процентных платежей R по ПЛТ и формуле

Параметры функции						**Расчет функции R**		**Вид формулы**
j, %	***n***	***m***	***S, руб.***	***P, руб.***	***k***	**по ПЛТ**	**по формуле**	
8	1	12	40 000	100	0	?	?	$R = ?$

4. Расчет продолжительности платежей (при $m = 1$) или количества периодических выплат N по КПЕР и формуле

Параметры функции						**Расчет функции $N = nm$**		**Вид формулы**
j, %	***S, руб.***	***m***	***R, руб.***	***P, руб.***	***k***	**по КПЕР**	**по формуле**	
5	50 000	12	0	2000	0	?	?	$N = ?$

5. Расчет ставки по СТАВКА и формуле

Параметры функции						**Расчет функции i**		**Вид формулы**
S, руб.	***m***	***n***	***R, руб.***	***P, руб.***	***k***	**по СТАВКА**	**по формуле**	
50 000	12	2	0	2000	0	?	?	$j = ?$

Вариант № 4
по теме: «Наращение и дисконтирование»

1. Рассчитать сумму вклада *S* (величину займа) по БС и формуле

Параметры функции						Расчет функции S		Вид формулы
***i*, %**	***n***	***m***	***R*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по БС**	**по формуле**	
7	2	1	500	5000	0	?	?	$S = ?$

2. Рассчитать стоимость инвестиции *P* по ПС и формуле

Параметры функции						Расчет функции P		Вид формулы
***i*, %**	***n***	***m***	***R*, руб.**	***S*, руб.**	***k***	**по ПС**	**по формуле**	
5	5	1	500	10 000	1	?	?	$P = ?$

3. Расчет процентных платежей *R* по ПЛТ и формуле

Параметры функции						Расчет функции R		Вид формулы
***i*, %**	***n***	***m***	***S*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по ПЛТ**	**по формуле**	
5	5	1	10 000	500	1	?	?	$R = ?$

4. Расчет продолжительности платежей (при $m = 1$) или количества периодических выплат *N* по КПЕР и формуле

Параметры функции						Расчет функции $N = nm$		Вид формулы
***j*, %**	***S*, руб.**	***m***	***R*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по КПЕР**	**по формуле**	
6	25 000	6	400	4000	1	?	?	$N = ?$

5. Расчет ставки по СТАВКА и формуле

Параметры функции						Расчет функции *i*		Вид формулы
***S*, руб.**	***m***	***n***	***R*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по СТАВКА**	**по формуле**	
25 000	6	3	400	4000	1	?	?	$j = ?$

Вариант № 5
по теме: «Наращение и дисконтирование»

1. Рассчитать сумму вклада *S* (величину займа) по БС и формуле

Параметры функции						Расчет функции S		Вид формулы
***j*, %**	***n***	***m***	***R*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по БС**	**по формуле**	
7	2	4	200	0	1	?	?	$S = ?$

2. Рассчитать стоимость инвестиции *P* по ПС и формуле

Параметры функции						Расчет функции P		Вид формулы
***j*, %**	***n***	***m***	***R*, руб.**	***S*, руб.**	***k***	**по ПС**	**по формуле**	
7	10	6	0	50000	0	?	?	$P = ?$

3. Расчет процентных платежей *R* по ПЛТ и формуле

Параметры функции						Расчет функции *R*		Вид формулы
***j*, %**	***n***	***m***	***S*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по ПЛТ**	**по формуле**	
7	10	6	50 000	0	0	?	?	$R = ?$

4. Расчет продолжительности платежей (при $m = 1$) или количества периодических выплат *N* по КПЕР и формуле

Параметры функции						Расчет функции $N = nm$		Вид формулы
***i*, %**	***S*, руб.**	***m***	***R*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по КПЕР**	**по формуле**	
7	30 000	1	500	5000	0	?	?	$N = ?$

5. Расчет ставки по СТАВКА и формуле

Параметры функции						Расчет функции *i*		Вид формулы
***S*, руб.**	***m***	***n***	***R*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по СТАВКА**	**по формуле**	
30 000	1	2	500	5000	0	?	?	$j = ?$

Вариант № 6
по теме: «Наращение и дисконтирование»

1. Рассчитать сумму вклада *S* (величину займа) по БС и формуле

Параметры функции						Расчет функции S		Вид формулы
***j*, %**	***n***	***m***	***R*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по БС**	**по формуле**	
7	2	12	0	8000	0	?	?	$S = ?$

2. Рассчитать стоимость инвестиции *P* по ПС и формуле

Параметры функции						Расчет функции P		Вид формулы
***j*, %**	***n***	***m***	***R*, руб.**	***S*, руб.**	***k***	**по ПС**	**по формуле**	
6	1	12	100	20 000	1	?	?	$P = ?$

3. Расчет процентных платежей *R* по ПЛТ и формуле

Параметры функции						Расчет функции R		Вид формулы
***j*, %**	***n***	***m***	***S*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по ПЛТ**	**по формуле**	
6	1	12	20 000	100	1	?	?	$R = ?$

4. Расчет продолжительности платежей (при $m = 1$) или количества периодических выплат *N* по КПЕР и формуле

Параметры функции						Расчет функции $N = nm$		Вид формулы
***i*, %**	***S*, руб.**	***m***	***R*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по КПЕР**	**по формуле**	
8	25 000	1	400	3000	1	?	?	$N = ?$

5. Расчет ставки по СТАВКА и формуле

Параметры функции						Расчет функции *i*		Вид формулы
***S*, руб.**	***m***	***n***	***R*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по СТАВКА**	**по формуле**	
25 000	1	3	400	3000	1	?	?	$j = ?$

Вариант № 7
по теме: «Наращение и дисконтирование»

1. Рассчитать сумму вклада S (величину займа) по БС и формуле

Параметры функции						Расчет функции S		Вид формулы
***i*, %**	***n***	***m***	***R*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по БС**	**по формуле**	
10	5	1	1000	0	1	?	?	$S = ?$

2. Рассчитать стоимость инвестиции P по ПС и формуле

Параметры функции						Расчет функции P		Вид формулы
***i*, %**	***n***	***m***	***R*, руб.**	***S*, руб.**	***k***	**по ПС**	**по формуле**	
5	5	1	500	10 000	0	?	?	$P = ?$

3. Расчет процентных платежей R по ПЛТ и формуле

Параметры функции						Расчет функции R		Вид формулы
***i*, %**	***n***	***m***	***S*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по ПЛТ**	**по формуле**	
5	5	1	10 000	500	0	?	?	$R = ?$

4. Расчет продолжительности платежей (при $m = 1$) или количества периодических выплат N по КПЕР и формуле

Параметры функции						Расчет функции $N = nm$		Вид формулы
***j*, %**	***S*, руб.**	***m***	***R*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по КПЕР**	**по формуле**	
6	50 000	12	0	2000	0	?	?	$N = ?$

5. Расчет ставки по СТАВКА и формуле

Параметры функции						Расчет функции i		Вид формулы
***S*, руб.**	***m***	***n***	***R*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по СТАВКА**	**по формуле**	
50 000	12	2	0	2000	0	?	?	$j = ?$

Вариант № 8
по теме: «Наращение и дисконтирование»

1. Рассчитать сумму вклада *S* (величину займа) по БС и формуле

Параметры функции						Расчет функции *S*		Вид формулы
***j*, %**	***n***	***m***	***R*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по БС**	**по формуле**	
10	5	4	1000	300	0	?	?	$S = ?$

2. Рассчитать стоимость инвестиции *P* по ПС и формуле

Параметры функции						Расчет функции *P*		Вид формулы
***j*, %**	***n***	***m***	***R*, руб.**	***S*, руб.**	***k***	**по ПС**	**по формуле**	
7	5	6	0	50 000	1	?	?	$P = ?$

3. Расчет процентных платежей *R* по ПЛТ и формуле

Параметры функции						Расчет функции *R*		Вид формулы
***j*, %**	***n***	***m***	***S*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по ПЛТ**	**по формуле**	
7	5	6	50 000	0	1	?	?	$R = ?$

4. Расчет продолжительности платежей (при $m = 1$) или количества периодических выплат *N* по КПЕР и формуле

Параметры функции						Расчет функции $N = nm$		Вид формулы
***j*, %**	***S*, руб.**	***m***	***R*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по КПЕР**	**по формуле**	
9	25 000	6	400	4000	1	?	?	$N = ?$

5. Расчет ставки по СТАВКА и формуле

Параметры функции						Расчет функции *i*		Вид формулы
***S*, руб.**	***m***	***n***	***R*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по СТАВКА**	**по формуле**	
25 000	6	3	400	4000	1	?	?	$j = ?$

Вариант № 9
по теме: «Наращение и дисконтирование»

1. Рассчитать сумму вклада *S* (величину займа) по БС и формуле

Параметры функции						Расчет функции *S*		Вид формулы
***j*, %**	***n***	***m***	***R*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по БС**	**по формуле**	
10	5	4	1000	300	0	?	?	$S = ?$

2. Рассчитать стоимость инвестиции *P* по ПС и формуле

Параметры функции						Расчет функции P		Вид формулы
***j*, %**	***n***	***m***	***R*, руб.**	***S*, руб.**	***k***	**по ПС**	**по формуле**	
8	5	12	100	40 000	0	?	?	$P = ?$

3. Расчет процентных платежей *R* по ПЛТ и формуле

Параметры функции						Расчет функции *R*		Вид формулы
***j*, %**	***n***	***m***	***S*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по ПЛТ**	**по формуле**	
8	5	12	40 000	100	0	?	?	$R = ?$

4. Расчет продолжительности платежей (при $m = 1$) или количества периодических выплат *N* по КПЕР и формуле

Параметры функции						Расчет функции $N = nm$		Вид формулы
***i*, %**	***S*, руб.**	***m***	***R*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по КПЕР**	**по формуле**	
5	30 000	1	500	5000	0	?	?	$N = ?$

5. Расчет ставки по СТАВКА и формуле

Параметры функции						Расчет функции *i*		Вид формулы
***S*, руб.**	***m***	***n***	***R*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по СТАВКА**	**по формуле**	
30 000	1	2	500	5000	0	?	?	$j = ?$

Вариант № 10
по теме: «Наращение и дисконтирование»

1. Рассчитать сумму вклада *S* (величину займа) по БС и формуле

Параметры функции						Расчет функции *S*		Вид формулы
***i*, %**	***n***	***m***	***R*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по БС**	**по формуле**	
6	5	1	1000	0	1	?	?	$S = ?$

2. Рассчитать стоимость инвестиции *P* по ПС и формуле

Параметры функции						Расчет функции *P*		Вид формулы
***i*, %**	***n***	***m***	***R*, руб.**	***S*, руб.**	***k***	**по ПС**	**по формуле**	
5	6	1	500	10 000	1	?	?	$P = ?$

3. Расчет процентных платежей *R* по ПЛТ и формуле

Параметры функции						Расчет функции *R*		Вид формулы
***i*, %**	***n***	***m***	***S*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по ПЛТ**	**по формуле**	
5	6	1	10000	500	1	?	?	$R = ?$

4. Расчет продолжительности платежей (при $m = 1$) или количества периодических выплат *N* по КПЕР и формуле

Параметры функции						Расчет функции $N = nm$		Вид формулы
***j*, %**	***S*, руб.**	***m***	***R*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по КПЕР**	**по формуле**	
6	25 000	4	300	3000	1	?	?	$N = ?$

5. Расчет ставки по СТАВКА и формуле

Параметры функции						Расчет функции *i*		Вид формулы
***S*, руб.**	***m***	***n***	***R*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по СТАВКА**	**по формуле**	
25 000	4	3	300	3000	1	?	?	$j = ?$

Вариант № 11
по теме: «Наращение и дисконтирование»

1. Рассчитать сумму вклада *S* (величину займа) по БС и формуле

Параметры функции						Расчет функции *S*		Вид формулы
***j*, %**	***n***	***m***	***R*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по БС**	**по формуле**	
6	5	4	1000	300	0	?	?	$S = ?$

2. Рассчитать стоимость инвестиции *P* по ПС и формуле

Параметры функции						Расчет функции *P*		Вид формулы
***j*, %**	***n***	***m***	***R*, руб.**	***S*, руб.**	***k***	**по ПС**	**по формуле**	
7	5	6	0	50 000	0	?	?	$P = ?$

3. Расчет процентных платежей *R* по ПЛТ и формуле

Параметры функции						Расчет функции *R*		Вид формулы
***j*, %**	***n***	***m***	***S*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по ПЛТ**	**по формуле**	
7	5	6	50 000	0	0	?	?	$R = ?$

4. Расчет продолжительности платежей (при $m = 1$) или количества периодических выплат *N* по КПЕР и формуле

Параметры функции						Расчет функции $N = nm$		Вид формулы
***j*, %**	***S*, руб.**	***m***	***R*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по КПЕР**	**по формуле**	
5	50 000	12	10	2000	0	?	?	$N = ?$

5. Расчет ставки по СТАВКА и формуле

Параметры функции						Расчет функции *i*		Вид формулы
***S*, руб.**	***m***	***n***	***R*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по СТАВКА**	**по формуле**	
50 000	12	2	10	2000	0	?	?	$j = ?$

Вариант № 12
по теме: «Наращение и дисконтирование»

1. Рассчитать сумму вклада *S* (величину займа) по БС и формуле

Параметры функции						**Расчет функции *S***		**Вид формулы**
j, %	***n***	***m***	***R, руб.***	***P, руб.***	***k***	**по БС**	**по формуле**	
6	5	12	1000	600	0	?	?	$S = ?$

2. Рассчитать стоимость инвестиции *P* по ПС и формуле

Параметры функции						**Расчет функции *P***		**Вид формулы**
j, %	***n***	***m***	***R, руб.***	***S, руб.***	***k***	**по ПС**	**по формуле**	
6	2	12	100	20 000	1	?	?	$P = ?$

3. Расчет процентных платежей R по ПЛТ и формуле

Параметры функции						**Расчет функции *R***		**Вид формулы**
j, %	***n***	***m***	***S, руб.***	***P, руб.***	***k***	**по ПЛТ**	**по формуле**	
6	2	12	20 000	100	1	?	?	$R = ?$

4. Расчет продолжительности платежей (при $m = 1$) или количества периодических выплат *N* по КПЕР и формуле

Параметры функции						**Расчет функции $N = nm$**		**Вид формулы**
j, %	***S, руб.***	***m***	***R, руб.***	***P, руб.***	***k***	**по КПЕР**	**по формуле**	
6	25 000	6	400	4000	1	?	?	$N = ?$

5. Расчет ставки по СТАВКА и формуле

Параметры функции						**Расчет функции *i***		**Вид формулы**
S, руб.	***m***	***n***	***R, руб.***	***P, руб.***	***k***	**по СТАВКА**	**по формуле**	
25 000	6	3	400	4000	1	?	?	$j = ?$

Вариант № 13
по теме: «Наращение и дисконтирование»

1. Рассчитать сумму вклада S (величину займа) по БС и формуле

Параметры функции						**Расчет функции *S***		**Вид формулы**
i, %	***n***	***m***	***R, руб.***	***P, руб.***	***k***	**по БС**	**по формуле**	
8	2	1	500	5000	0	?	?	$S = ?$

2. Рассчитать стоимость инвестиции P по ПС и формуле

Параметры функции						**Расчет функции *P***		**Вид формулы**
j, %	***n***	***m***	***R, руб.***	***S, руб.***	***k***	**по ПС**	**по формуле**	
5	3	4	500	10 000	0	?	?	$P = ?$

3. Расчет процентных платежей R по ПЛТ и формуле

Параметры функции						**Расчет функции *R***		**Вид формулы**
j, %	***n***	***m***	***S, руб.***	***P, руб.***	***k***	**по ПЛТ**	**по формуле**	
5	3	4	10 000	500	0	?	?	$R = ?$

4. Расчет продолжительности платежей (при $m = 1$) или количества периодических выплат N по КПЕР и формуле

Параметры функции						**Расчет функции $N = nm$**		**Вид формулы**
j, %	***S, руб.***	***m***	***R, руб.***	***P, руб.***	***k***	**по КПЕР**	**по формуле**	
7	30 000	4	0	5000	0	?	?	$N = ?$

5. Расчет ставки по СТАВКА и формуле

Параметры функции						**Расчет функции *i***		**Вид формулы**
S, руб.	***m***	***n***	***R, руб.***	***P, руб.***	***k***	**по СТАВКА**	**по формуле**	
30 000	4	2	0	5000	0	?	?	$j = ?$

Вариант № 14
по теме: «Наращение и дисконтирование»

1. Рассчитать сумму вклада *S* (величину займа) по БС и формуле

Параметры функции						Расчет функции *S*		Вид формулы
***j*, %**	***n***	***m***	***R*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по БС**	**по формуле**	
8	2	4	200	0	1	?	?	*S* = ?

2. Рассчитать стоимость инвестиции *P* по ПС и формуле

Параметры функции						Расчет функции *P*		Вид формулы
***j*, %**	***n***	***m***	***R*, руб.**	***S*, руб.**	***k***	**по ПС**	**по формуле**	
7	2	4	0	50000	1	?	?	*P* = ?

3. Расчет процентных платежей *R* по ПЛТ и формуле

Параметры функции						Расчет функции *R*		Вид формулы
***j*, %**	***n***	***m***	***S*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по ПЛТ**	**по формуле**	
7	2	4	50000	0	1	?	?	*R* = ?

4. Расчет продолжительности платежей (при $m = 1$) или количества периодических выплат *N* по КПЕР и формуле

Параметры функции						Расчет функции *N* = *nm*		Вид формулы
***i*, %**	***S*, руб.**	***m***	***R*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по КПЕР**	**по формуле**	
8	25 000	1	700	3000	1	?	?	*N* = ?

5. Расчет ставки по СТАВКА и формуле

Параметры функции						Расчет функции *i*		Вид формулы
***S*, руб.**	***m***	***n***	***R*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по СТАВКА**	**по формуле**	
25 000	1	3	700	3000	1	?	?	*j* = ?

Вариант № 15
по теме: «Наращение и дисконтирование»

1. Рассчитать сумму вклада *S* (величину займа) по БС и формуле

Параметры функции						Расчет функции *S*		Вид формулы
***j*, %**	***n***	***m***	***R*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по БС**	**по формуле**	
8	2	12	0	8000	0	?	?	$S = ?$

2. Рассчитать стоимость инвестиции *P* по ПС и формуле

Параметры функции						Расчет функции *P*		Вид формулы
***j*, %**	***n***	***m***	***R*, руб.**	***S*, руб.**	***k***	**по ПС**	**по формуле**	
8	1	4	100	40 000	0	?	?	$P = ?$

3. Расчет процентных платежей *R* по ПЛТ и формуле

Параметры функции						Расчет функции *R*		Вид формулы
***j*, %**	***n***	***m***	***S*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по ПЛТ**	**по формуле**	
8	1	4	40 000	100	0	?	?	$R = ?$

4. Расчет продолжительности платежей (при $m = 1$) или количества периодических выплат *N* по КПЕР и формуле

Параметры функции						Расчет функции $N = nm$		Вид формулы
***j*, %**	***S*, руб.**	***m***	***R*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по КПЕР**	**по формуле**	
6	40 000	12	0	2000	0	?	?	$N = ?$

5. Расчет ставки по СТАВКА и формуле

Параметры функции						Расчет функции *i*		Вид формулы
***S*, руб.**	***m***	***n***	***R*, руб.**	***P*, руб.**	***k***	**по СТАВКА**	**по формуле**	
40 000	12	2	0	2000	0	?	?	$j = ?$

Темы предлагаемых рефератов

1. Основы актуарной науки.
2. Финансовая математика и кибернетика.
3. Финансовая математика и банковский учет.
4. История развития актуарной мысли.
5. Роль актуариев в оценке индивидуальных и корпоративных рисков.
6. Проценты, процентная ставка и доходность финансовых операций.
7. Основы балансовых финансовых схем.
8. Роль актуариев в обосновании страховых и пенсионных схем.
9. Актуарный метод в области бизнеса.
10. Актуарный метод в области социальной сферы.
11. Актуарный метод в области финансов.
12. Предмет, метод и объект финансовой математики.
13. Оценка страховых и ипотечных сделок.
14. Финансовая математика и электронные таблицы.
15. Математическое дисконтирование и банковский учет.
16. Банковские операции.
17. Система начисления дивидендов на предприятии.
18. Налоговые схемы при начислении зарплаты.
19. Учет инфляции в банковских операциях.
20. Расчет амортизации на предприятиях.

Тестовые задания

1. Финансовая математика представляет собой:

- совокупность методов определения изменения финансовых показателей;
- совокупность методов определения изменения стоимости денег, происходящего вследствие их движения в процессе воспроизводства, стройная система математических моделей, описывающих финансовые процессы;
- совокупность методов определения изменения стоимости денег, происходящего вследствие их движения в процессе воспроизводства, система математических моделей (аналитических формул и способов исчисления);

- совокупность методов по измерению стоимости денег, находящихся в процессе воспроизводства, стройная система математических моделей;
- совокупность методов количественного анализа стоимости денег, стройная система математических моделей (аналитических формул и способов исчисления).

2. Что не относится к основным задачам финансовой математики?

- Разработка бизнес-планов организаций и аналитических финансово-экономических отчетов.
- Измерение конечных финансовых результатов операции (сделки, контракта) для каждой из участвующих сторон.
- Разработка планов выполнения финансовых операций, в том числе планов погашения задолженности.
- Определение допустимых критических значений параметров, расчет параметров эквивалентного (безубыточного) изменения первоначальных условий операции.
- Измерение зависимости конечных результатов финансовой операции от основных ее параметров.

3. Объектом исследования финансовой математики являются финансовые операции, включающие следующие параметры:

- количественные характеристики, временные данные, характеристики эффективности (доходности) финансовой операции;
- стоимостные характеристики, сроки выполнения финансовых операций, характеристики прибыльности финансовой операции;
- стоимостные характеристики, временные данные, характеристики эффективности (доходности) финансовой операции;
- стоимостные характеристики основных средств, сроки, характеристики эффективности (доходности) финансовой операции;
- стоимостные показатели рентабельности, временные данные, характеристики эффективного использования финансовых средств.

4. Количественный финансовый анализ, предназначенный для решения разнообразных задач, подразделяется на 2 группы:

- внутренний и внешний;
- материальный и идеальный;
- традиционный и нетрадиционный;
- основной и неосновной;
- главный и второстепенный.

5.Факторы, влияющие на уровень процентных ставок:

- внешняя политика, денежная масса, ожидания относительно будущей инфляции;

- внутренняя политика правительства, денежная масса, ожидания относительно будущей инфляции;
- интересы монополий и государства, денежная масса, ожидания относительно будущей инфляции;
- политика правительства, денежная масса, ожидания относительно будущей инфляции;
- международная политика, цена на основные энергоносители, ожидания относительно будущей инфляции.

6. Факторы, не влияющие на различие процентных ставок:

- время до погашения финансовых обязательств;
- платежеспособность сторон;
- риск невыполнения обязательств;
- ликвидность финансовых обязательств, налогообложение;
- факторы, специфические для конкретных финансовых обязательств.

7. Текущая стоимость находится путем

- наращения каждого из потоков платежей на процент, который мог бы быть заработан, если бы эти средства были получены сегодня;
- дисконтирования всех потоков платежей на процент, которые могли бы быть заработаны, если бы эти средства были получены сегодня;
- дисконтирования каждого из потоков платежей на процент, который мог бы быть заработан, если бы эти средства были получены сегодня;
- дисконтирования суммы на процент, который не мог бы быть заработан, если бы эти средства были получены сегодня;
- дисконтирования каждого из потоков платежей на процент, который мог бы быть заработан, если бы эти средства не были получены сегодня.

8. Будущая стоимость находится

- наращением всех процентных платежей, которые можно было бы получить на данную сумму до наступления определенного момента в будущем;
- дисконтированием всех процентных платежей, которые можно было бы не получить на данную сумму до наступления определенного момента в будущем;
- наращением всех процентных платежей, которые можно было бы получить на данную сумму до наступления определенного текущего момента;
- наращением всех процентных платежей на определенный текущий момент и в будущем.

9. Простые проценты — это:

- проценты, которые рассчитываются как произведение процентной ставки, количества лет (или их соответствующих долей) до срока погашения и суммы вклада;

- процедуры, начисляемые на определенную сумму в течение всего срока финансового обязательства, рассчитываются как произведение процентной ставки, количества лет (или их соответствующих долей) до срока погашения и суммы вклада;
- проценты, начисляемые ежемесячно на определенную сумму в течение всего срока финансового обязательства, рассчитываются как произведение процентной ставки, количества лет (или их соответствующих долей) до срока погашения и суммы вклада;
- проценты, начисляемые в течение всего срока финансового обязательства, рассчитываются как произведение процентной ставки, количества лет (или их соответствующих долей) до срока погашения и суммы вклада;
- проценты, начисляемые на поступающие суммы в течение всего срока финансового обязательства, рассчитываются как произведение процентной ставки, количества лет (или их соответствующих долей) до срока погашения и суммы вклада.

10. Сложные проценты. Найдите верное высказывание.

- Наращение по сложным процентам относится к ежемесячному добавлению накопленных процентов к основной сумме долга.
- Наращение по сложным процентам относится к периодическому добавлению накопленных процентов к основной сумме долга.
- Наращение по сложным процентам относится к добавлению накопленных процентов к основной сумме долга.
- Наращение по сложным процентам относится к непрерывному добавлению накопленных процентов к основной сумме долга.
- Наращение по сложным процентам относится к ежегодичому добавлению накопленных процентов к основной сумме долга.

11. Чем отличается дискретное наращение от непрерывного?

- При дискретном наращении платежи по сложной процентной ставке происходит через конкретные промежутки времени, а при непрерывном по постоянному закону.
- При дискретном наращении начисления по простой процентной ставке происходит через конкретные промежутки времени, а при непрерывном — постоянно во времени.
- При дискретном наращении выплаты по сложной процентной ставке происходит через конкретные промежутки времени, а при непрерывном — постоянно во времени.
- При дискретном наращении начисления по сложной процентной ставке происходит через равные промежутки времени, а при непрерывном — постоянно во времени.

- При дискретном наращении начисления по сложной процентной ставке происходит через конкретные промежутки времени, а при непрерывном — постоянно во времени.

12. Непрерывное наращение — это:

- натуральный логарифм дискретного наращения при стремлении числа начислений сложных процентов к бесконечности;
- логарифм предела дискретного наращения при стремлении числа начислений сложных процентов к бесконечности;
- предел дискретного наращения при стремлении числа начислений сложных процентов к бесконечности;
- непрерывная и дифференцируемая функция наращения при стремлении числа начислений сложных процентов к бесконечности;
- предел процентной ставки дискретного наращения при стремлении числа начислений сложных процентов к бесконечности.

13. Всегда ли наращенная сумма, рассчитанная с использованием простой процентной ставки, меньше наращенной суммы, определенной с использованием сложной ставки:

- да;
- нет, не всегда меньше;
- нет, всегда больше;
- меньше или равна;
- больше или равна.

14. Процедура дисконтирования используется для определения:

- будущей стоимости;
- современной (приведенной) стоимости;
- нет верного ответа;
- прибавочной стоимости;
- настоящей стоимости

15. По какому закону изменяется наращенная сумма при непрерывном наращении?

- по линейному;
- по среднему гармоническому;
- поэкспоненциальному;
- по нормальному закону;
- по арифметической прогрессии

16. Сила роста представляет собой:

- эффективную ставку сложных процентов при $m \to \infty$;
- годовую ставку сложных процентов при $m \to \infty$;
- учетную годовую ставку сложных процентов при $m \to \infty$;

- спот-ставку сложных процентов при $m \to \infty$;
- номинальную ставку сложных процентов при $m \to \infty$.

17. Спот-ставка — это:

- процентная ставка, которая используется на финансовых рынках для наращения будущих денежных потоков и приведения их к будущей стоимости;
- процентная ставка, которая используется на финансовых рынках для дисконтирования будущих денежных потоков и приведения их к текущей стоимости;
- процентная ставка, которая используется на финансовых рынках для дискретного дисконтирования будущих денежных потоков и приведения их к текущей стоимости;
- процентная ставка, которая используется для расчетов будущих денежных потоков и приведения их к номинальной стоимости;
- процентная ставка, которая используется при кредитовании для наращения текущих денежных потоков и приведения их к будущей стоимости.

18. Форвардная процентная ставка — это

- процентная ставка, зафиксированная сегодня для ссуды, предоставляемой в будущем;
- процентная ставка, зафиксированная сегодня для облигаций, погашаемых в будущем;
- процентная ставка для определения будущей эффективной процентной ставки;
- процентная ставка, зафиксированная сегодня для кредита, погашаемого в будущем;
- процентная ставка, для определения будущей эффективной процентной ставки.

19. Форвардные процентные ставки можно определить исходя из

- корня соотношения между последовательными спот-ставками;
- квадрата соотношения между последовательными спот-ставками;
- логарифма соотношения между последовательными спот-ставками;
- разницы между последовательными спот-ставками;
- соотношения между последовательными спот-ставками.

20. Форвардная ставка по депозиту может быть создана путем

- кредитования на короткий срок и помещения этих денег на депозит на длительный срок;
- заимствования на длинный срок и помещения этих денег на депозит на короткий срок;
- заимствования на короткий срок и помещения этих денег на депозит на длительный срок;

- помещения на короткий срок и заимствования этих денег на депозит на длительный срок;
- помещения этих денег на депозит на длительный срок и затем заимствования на короткий срок.

21. Как учитывать постоянные рентные платежи (выплаты) при наращении и дисконтировании (пренумерандо)?

- Постоянные платежи (выплаты) умножить на отношение разницы между множителем наращения в степени платежей (выплат) минус единица к процентной ставке.
- Постоянные платежи (выплаты) умножить на отношение разницы между множителем наращения в степени общих платежей (выплат) минус единица к учетной процентной ставке.
- Постоянные платежи (выплаты) умножить на отношение разницы между множителем наращения в степени общего числа платежей (выплат) и единицей к процентной ставке.
- Постоянные платежи (выплаты) умножить на отношение разницы между множителем наращения в степени годовых платежей (выплат) минус единица к процентной ставке.
- Постоянные платежи (выплаты) умножить на отношение суммы между множителем наращения в степени общих платежей (выплат) и единицей к процентной ставке.

22. Облигации и боны — это

- долговые обязательства, выпускаемые с целью аккумулирования капитала;
- долговые обязательства, по которым выплачиваются фиксированные проценты, а ссуда и дивиденды возвращается полностью в установленное время;
- долговые обязательства, выпускаемые с целью аккумулирования капитала, по которым выплачиваются фиксированные проценты, а ссуда возвращается полностью в установленное время;
- долговые обязательства, выпускаемые с целью аккумулирования капитала, по которым выплачиваются ежемесячные проценты, а ссуда возвращается полностью в установленное время;
- долговые обязательства, выпускаемые с целью аккумулирования капитала, по которым выплачиваются годовые проценты, а ссуда возвращается полностью в установленное время.

23. Акции — это

- долевые ценные бумаги, по которым выплачиваются фиксированные проценты, а ссуда и дивиденды возвращается полностью в установленное время;

- долговые обязательства, выпускаемые с целью аккумулирования капитала, по которым выплачиваются фиксированные проценты, а ссуда возвращается полностью в установленное время;
- долевые ценные бумаги, выпускаемые с целью аккумулирования капитала, по которым выплачиваются ежемесячные проценты, а ссуда возвращается полностью в установленное время;
- долевые ценные бумаги, выпускаемые с целью аккумулирования капитала, по которым выплачиваются годовые проценты, а ссуда возвращается полностью в установленное время;
- долевые ценные бумаги, выпускаемые для увеличения капитала, по которым выплачиваются дивиденды и они являются предметом игры на бирже.

24. Форвардный контракт или форвард — это:

- соглашение о продаже некоторого товара в определенный момент в будущем по фиксированной цене, оно обязательно к исполнению обеими сторонами;
- соглашение о поставке некоторого товара в определенный момент в будущем по фиксированной цене, оно обязательно к исполнению обеими сторонами;
- соглашение о покупке некоторого товара в определенный момент в будущем по фиксированной цене, оно обязательно к исполнению обеими сторонами;
- соглашение о поставке-покупке некоторого товара в определенный момент в будущем по переменной цене, оно обязательно к исполнению обеими сторонами;
- соглашение о поставке-покупке некоторого товара в определенный момент в будущем по фиксированной цене, оно обязательно к исполнению обеими сторонами.

25. Фьючерсные контракты или фьючерсы — это:

- соглашение о поставке-покупке некоторого товара в определенный момент в будущем по фиксированной цене;
- соглашение о продаже некоторого товара в определенный момент в будущем по фиксированной цене;
- соглашения, аналогичные форвардным, но дополненные специальным механизмом перерасчета, делающим отказ от выполнения договора невыгодным для обеих сторон;
- соглашение-обязательство о покупке некоторого товара в определенный момент в будущем по фиксированной цене, оно обязательно к исполнению обеими сторонами;

- соглашение о поставке-покупке некоторого товара в определенный момент в будущем по переменной цене, оно не обязательное к исполнению сторонами.

26. Опцион — это:

- контракт дополненный специальным механизмом перерасчета, делающим отказ от выполнения контракта невыгодным для обеих сторон;
- контракт, дающий право покупателю купить или продать определенную ценность в установленный момент времени или период времени на заранее оговоренных условиях по цене покупки-продажи;
- контракт о поставке-покупке некоторого товара в определенный момент в будущем по переменной цене, оно не обязательное к исполнению сторонами;
- контракт о поставке-покупке некоторого товара в определенный момент в будущем по фиксированной цене;
- контракт об условиях продаже некоторого товара в определенный момент в будущем по фиксированной цене.

27. Отличие опциона-колл от опциона-пут:

- Владелец опциона-колл имеет право купить, а опциона-пут — продать.
- Отличие зависит от условий эмитентов
- Нет существенных различий
- Владелец опциона-колл имеет право продать, а опциона-пут — купить.
- Отличаются типами — Европейский опцион и Американский опцион.

28. Дисконт это:

- разность между будущей и текущей стоимостью денег;
- учетный процент, взимаемый банком при учете векселей;
- разница между номиналом ценной бумаги и ее курсом на фондовой бирже;
- разность между доходом и затратами;
- приращение капитала

29. Дюрация —

- показатель средней продолжительности жизни облигации;
- изменение курса валют;
- показатель эффективности вложений капитала;
- показатель непрерывного наращения;
- дисконтный множитель при непрерывном дисконтировании

30. Переменная рента —

- поток последовательных платежей, члены которого не являются постоянными величинами;
- поток переменных платежей;

- поток переменных платежей, члены которого являются постоянными величинами;
- рента, выплачиваемая время от времени непостоянно;
- рента с переменным шагом начисления и переменными суммами начисления.

ГЛОССАРИЙ

Аннуитет (финансовая рента) — однонаправленный денежный поток с равными временными интервалами. Аннуитет, все Денежные потоки которого равны между собой, носит название *постоянного;* если равенство денежных потоков отсутствует, аннуитет называют *переменным.*

Антисипативный (предварительный) метод начисления процентов заключается в том, что проценты начисляются в начале расчетного периода, при этом за базу (100%) принимается сумма долга, подлежащая погашению.

Вексель — особый вид письменного долгового обязательства, составленного по установленной форме, дающий бесспорное право его владельцу (векселедержателю) требовать с должника (векселедателя) по истечении указанного в нем срока уплаты указанной суммы в определенном месте.

Вечная рента — финансовая рента с неограниченным числом членов и неограниченным временем действия.

Внутренняя норма доходности — ставка дисконтирования, при использовании которой современная стоимость притоков денежных капиталов равна современной стоимости их оттоков, что в результате дает нулевую чистую приведенную стоимость.

Годовая рента — финансовая рента, по которой платежи производятся 1 раз в год.

Декурсивный метод — метод процентных расчетов, при котором начисление процентов производится в конце расчетного периода.

Денежный поток — множество распределенных во времени притоков (поступлений) и оттоков (выплат) капитала как результат деятельности за определенный период.

Депозитный сертификат — денежный документ, выпускаемый первоклассными банками, с обязательством оплатить вклад (депозит) с начисленными на него процентами в конкретный срок; выписывается на конкретное лицо.

Дивидендная доходность — отношение величины годового дивиденда, приходящегося на одну акцию, к рыночной цене акции.

Дисконт — а) разность между будущей и текущей стоимостью денег;

б) учетный процент, взимаемый банком при учете векселей; в) разница между номиналом ценной бумаги и ее курсом на фондовой бирже.

Дисконтирование — процесс, обратный наращению, который связан с определением современной стоимости денег на основании суммы, ожидаемой к получению в определенный момент в будущем.

Дисконтный множитель — показатель, характеризующий, во сколько раз первоначальная сумма ссуды меньше наращенной суммы.

Дисконтирование банковское — определение современной стоимости долгового обязательства с использованием учетной ставки.

Дисконтирование математическое — определение современной стоимости денежных средств по величине наращенной суммы, известной величине процентной ставки и продолжительности периода, к которым относится будущая и современная стоимость.

Доходность облигации к погашению (полная доходность) — норма прибыли, которую получает инвестор, если облигации, приносящие купонный доход, сохраняются до срока погашения.

Доходность финансового актива — относительный показатель, получаемый из соотношения величины дохода, генерируемого данным активом, и величины исходной инвестиции в него.

Дюрация — показатель средней продолжительности жизни облигации. Чем выше дюрация, тем более чувствительна облигация к изменению процентной ставки и выше процентный риск вложения в облигацию.

Индекс покупательной способности денег — величина, обратная индексу цен.

Ипотечная ссуда — ссуда, выдаваемая под залог недвижимости.

Инфляция — процесс, характеризующий повышение общего уровня цен в экономике, что приводит к снижению покупательной способности денег.

Индекс цен — относительный показатель, характеризующий изменение цен.

Капитализация процентов — процедура систематического присоединения начисленных процентов к той сумме, относительно которой они определялись.

Консолидация платежей — объединение нескольких платежей в один с установлением единого срока погашения.

Коэффициент наращения ренты показывает, во сколько раз наращенная сумма ренты больше первого члена ренты.

Коэффициент приведения ренты показывает, сколько рентных платежей содержится в современной величине.

Купонная доходность — процентный доход от номинала облигации, который указан на ценной бумаге и который эмитент обязуется уплатить по каждому купону.

Купонная ставка — ставка процента, определяющая регулярный доход, выплачиваемый инвестору.

Курс облигации — покупная цена облигации в расчете на 100 денежных единиц ее номинала.

Модифицированная дюрация — показатель, характеризующий степень эластичности цены облигации при изменении процентной ставки на денежных рынках на 1%.

Множитель наращения процентов — выражение, характеризующее будущую стоимость одной денежной единицы через несколько процентных периодов, исходя из ставки наращения за период. Он показывает, во сколько раз увеличивается величина денежной суммы при ее наращивании.

Наращение — процесс увеличения первоначального капитала в связи с начислением процентов.

Наращенная сумма — величина, равная сумме выданного (полученного) кредита и начисленных процентов.

Наращенная сумма ренты — сумма всех членов потока платежей с начисленными на них процентами на конец срока ренты, т.е. на дату последней выплаты.

Непрерывные проценты — начисление процентов на сумму, выданную (полученную) в кредит, или дисконтирование будущих сумм, производимых с частотой, при которой их можно рассматривать как непрерывные.

Нулевой купон — доход от облигации, который образуется в результате разницы между ценой продажи и суммой, выплачиваемой владельцу облигации в момент погашения.

Облигация — ценная бумага, удостоверяющая внесение ее владельцем денежных средств эмитенту и обязательство последнего возместить ему номинальную стоимость облигации в заранее установленный срок с уплатой фиксированного процента.

Период ренты — временной интервал между двумя рентными платежами.

Переменная рента — поток последовательных платежей, члены которого не являются постоянными величинами.

Погасительный платеж — денежная сумма, предназначенная для погашения части основного долга и текущих процентов по нему за определенный период времени.

Портфель ценных бумаг — набор ценных бумаг, находящийся в распоряжении инвестора.

Потребительский кредит — кредит, предоставляемый населению для приобретения предметов личного пользования.

Приведенная (современная) величина ренты — один из обобщающих показателей ренты: сумма всех членов ренты, дисконтированных с учетом величины процентной ставки на определенный момент времени.

Процентная ставка — величина, характеризующая степень доходности финансовой операции.

Процентные деньги — величина процентного дохода, т.е. дохода, полученного в виде процентов на вложенный капитал.

Проценты простые — начисление процентов в течение всего срока кредита на одну и ту же величину капитала, предоставленного в кредит.

Проценты сложные — метод определения процентов, при котором начисленные проценты на первоначальную сумму складываются с этой суммой, а в последующих периодах проценты начисляются на уже наращенную сумму. При использовании данного метода база для начисления процентов постоянно меняется.

Процентная ставка номинальная — исходная процентная ставка, указываемая в договоре, не учитывающая дополнительных условий финансовой операции.

Процентная ставка реальная — процентная ставка, измеряющая доходность с учетом дополнительных условий финансовой операции и в условиях элиминирования инфляции.

Рейтинговая оценка ценных бумаг — оценка кредитного риска ценных бумаг, т.е. риска того, что эмитент не выполнит своих фиксированных денежных обязательств, связанных с ценной бумагой.

Рента постнумерандо — рента, в которой платежи производятся в конце соответствующих периодов (года, полугодия, квартала и т. д.).

Рента пренумерандо — рента, в которой платежи производятся в начале соответствующих периодов (года, полугодия, квартала и т. д.).

Рента финансовая — поток регулярных финансовых платежей.

Ставка дисконтирования — ставка, используемая для расчета приведенной (современной) стоимости.

Срок ренты — время от начала реализации ренты до момента начисления последнего платежа.

Срок окупаемости инвестиций (период окупаемости) — число лет, необходимых для возмещения инвестиционных расходов.

Срок облигации — средняя взвешенная величина, определяющая средний срок всех выплат по облигациям.

Ставка погашения долга — показатель, характеризующий величину доли выплаты основного долга в определенный период.

Текущая доходность облигации — характеризует соотношение выплачиваемого годового дохода и вложенного капитала, т.е. суммы, уплаченно инвестором в момент приобретения облигации.

Учетная ставка — ставка, используемая при учете векселей, а также процентная ставка Банка России.

Член ренты — величина отдельного рентного платежа.

Эквивалентная процентная ставка — ставка, обеспечивающая такой же финансовый результат, как и при использовании альтернативной процентной ставки.

Эффективная процентная ставка — ставка, отражающая реальный доход от коммерческой сделки, т.е. ставка, по которой фактически были начислены проценты на первоначальную сумму.

Список используемой литературы

Основная литература

1. Бочаров, П.П. Финансовая математика / П.П. Бочаров, Ю.Ф. Касимов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 576 с.
2. Галиаскаров, Ф.М. Методы расчета и математические модели финансовых операций / Ф.М. Галиаскаров, Г.Г. Муфтиев, Н.Д. Бублик, А.С. Кабирова. — Уфа: Дизайн Полиграф Сервис, 2009. — 576 с.
3. Ефимова, М.Р. Общая теория статистики: учебник / М.Р. Ефимова, Е.В. Петрова, В.Н. Румянцев. — М.: ИНФРА-М, 2006.
4. Капитоненко, В.В. Задачи и тесты по финансовой математике / В.В. Капитоненко. — М.: Финансы и статистика, 2011. — 256 с.
5. Касимов, Ю.Ф. Введение в финансовую математику / Ю.Ф. Касимов, С.А. Балашова. — М.: Изд-во Российского ун-та дружбы народов, 2007. — 288 с.
6. Мельников, А.В. Математические методы финансового анализа / А.В. Мельников, Н.В. Попова, В.С. Скорнякова. — М.: Анкил, 2006. — 440 с.
7. Практикум по статистике финансов: учебно-метод. пособие / под ред. М.Г. Назарова. — М.: КНОРУС, 2008.
8. Статистика: учеб. пособие / под ред. проф. М.Р. Ефимовой. — М.: ИНФРА-М, 2005.
9. Уотшем, Т. Количественные методы в финансах: учеб. пособие для вузов / Т. Уотшем, К. Паррамоу; пер. с англ.; под ред. М.Р. Ефимовой. — М.: Финансы, ЮНИТИ, 1999.
10. Финансовая математика: учеб. пособие для вузов / под ред. проф. Г.А. Титоренко. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. — 439 с.
11. Четыркин, Е.М. Финансовая математика: учебник / Е.М. Четыркин. — М.: Дело, АНХ, 2008. — 400 с.

Дополнительная литература

1. Брейли, Р. Принципы корпоративных финансов / Р. Брейли, С. Майерс; пер. с англ. — М.: Олимп-Бизнес, 2008.
2. Васильева, Л. С. Финансовый анализ: электронный учебник / Л. С. Васильева, М. В. Петровская. — М. : Кнорус, 2008. — 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

3. Зуев, В.П. Финансовая математика: учебно-методический комплекс для студентов экономического факультета / В.П. Зуев, И.С. Пыже. — Красноярск: Изд-во Красс ГУ, 2002. — 20 с.
4. Ковалев, В.В. Финансовый анализ: методы и процедуры / В.В. Ковалев. — М.: Финансы и статистика, 2002.
5. Макаров, С. И. Математика для экономистов: электронный учебник / С.И. Макаров. — М. : Кнорус, 2009. — 1 эл. опт. диск (CD-ROM).
6. Раис, Т. Финансовые инвестиции и риск / Т. Раис, Б. Койли. — Киев: Торгово-издательское бюро BHV, 1995.
7. Статистика финансов: учебник / под ред. В.Н. Салина. — М.: Финансы и статистика, 2002.
8. Финансовая математика: учеб. пособие / под ред. академика А.Н. Романова. — М.: Вузовский учебник, 2007. — 359с.

Литература из ресурсов Интернет

1. Независимый портал: «АКТУАРИИ: ПРОБЛЕМЫ, СОБЫТИЯ, ИНФОРМАЦИЯ». — URL: http://www.actuaries.ru/ (дата обращения 09.01.2014).
2. Инструменты финансового и инвестиционного анализа [Электронный ресурс]. — URL: http://investment-analisis.ru (дата обращения 09.01.2014).

Оглавление

Учебное издание

Быстров Александр Ильич

ПРАКТИКУМ ПО ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКЕ

Учебное пособие

Для студентов финансово-экономических специальностей

Электронная версия: Быстров А.И.

Сдано в набор 02.12.2013. Подписано в печать 18.12.2013.
Формат 60 × 84/16. Бумага офсетная.
Печать ризографическая. Усл. печ. л. 6,04. Уч.-изд. л. 6,69.
Тираж 300. Заказ № 77

БИСТ (филиал) ОУП ВПО «АТиСО»
450054, г. Уфа, пр. Октября, 74/2, оф. 224

Отпечатано в БИСТ (филиале) ОУП ВПО «АТиСО»