БАШКИРСКИЙ ИНСТИТУТ СОЦИАЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ФИЛИАЛ)
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ПРОФСОЮЗОВ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«АКАДЕМИЯ ТРУДА И СОЦИАЛЬНЫХ ОТНОШЕНИЙ»

Р.З. Гильмутдинов, Г.Р. Гузаирова

ЭКОНОМЕТРИКА

Учебно-методическое пособие
для студентов направлений прикладной информатики
и финансово-экономических специальностей

Уфа — 2015

УДК 330:519.862.6
ББК 65в6я73
Г47

Гильмутдинов, Р.З.

Г47 Эконометрика : учебно-методическое пособие / Р.З. Гильмутдинов, Г.Р. Гузаирова; БИСТ (филиал) ОУП ВО «АТиСО» — Уфа: Изд-во Башкирского института социальных технологий (филиала) Образовательного учреждения профсоюзов высшего образования «Академия труда и социальных отношений», 2015. — 100 с.

ISBN 978-5-904354-59-6

Учебное пособие «Эконометрика» разработано в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования для студентов финансово-экономических направлений и специальностей. Пособие предлагает систематизированное изложение основных понятий и методов эконометрики. Пособие содержит теоретический курс по основным разделам эконометрики: парная, множественная регрессия, производственные функции, системы эконометрических уравнений и временные ряды. Теоретический материал подкрепляется решением типовых задач. Для самостоятельной работы и контроля знаний предложены варианты индивидуальных заданий с подробным описанием решения подобной задачи.

Пособие предназначено для студентов очной формы обучения, а также для студентов заочной формы обучения для самостоятельного изучения дисциплины.

Рецензенты:
Сафин Рашит Рафаилович, доктор технических наук,
заведующий кафедрой математики и математического моделирования
Уфимского государственного университета экономики и сервиса;

Быстров Александр Ильич, кандидат технических наук, доцент,
заведующий кафедрой «Экономика, информатика и аудит»
Башкирского института социальных технологий (филиала)
Образовательного учреждения профсоюзов высшего образования
«Академия труда и социальных отношений», г. Уфа

УДК 330:519.862.6
ББК 65в6я73

ISBN 978-5-904354-59-6

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в связи с необходимостью получения достоверных результатов анализа реальной ситуации и последующего точного и надежного прогноза дальнейшего развития ситуации особую актуальность на предприятиях и организациях приобретает применение статистических методов прогнозирования, в том числе, методов эконометрики, которая исследует зависимости между различными экономическими показателями. Особенно важны такие методы в финансовых подразделениях предприятий и организаций, а также в подразделениях продаж, маркетинга, рекламы и др.

Цель преподавания дисциплины «Эконометрика» — научить специалистов финансовых подразделений, подразделений маркетинга, продаж, рекламы методам и моделям прикладного эконометрического анализа как инструмента выявления количественных зависимостей в реальных задачах, возникающих в их повседневной деятельности.

При преподавании дисциплины ставятся следующие задачи:

Ознакомить студентов с основными методами количественной оценки экономических процессов и количественного изучения взаимосвязей экономических показателей;

Научить студентов формализации постановки практических задач и содержательной интерпретации формальных результатов;

Дать студентам практический опыт применения изучаемых методов для решения конкретных практических задач, возникающих в их профессиональной деятельности;

Привить студентам умение самостоятельно изучать учебную и научную литературу по эконометрическим методам и использовать накопленные знания при решении прикладных эконометрических задач.

Пособие содержит курс лекций по основным разделам эконометрики: парная, множественная регрессия, производственные функции, системы эконометрических уравнений и временные ряды.

Для закрепления материала представлены варианты контрольных работ. Для выполнения контрольных заданий по 10 вариантам рассмотрены типовые задачи.

Пособие предназначено для студентов очной формы обучения, а также для студентов заочной формы обучения для самостоятельного изучения дисциплины.

1. ЭКОНОМЕТРИКА И ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

1.1. Понятие эконометрики

Некоторые величины в экономике можно контролировать непосредственно, их в любой момент можно не только измерить, но и изменить. К таким показателям относятся, например, численность сотрудников предприятия, стоимость основных производственных фондов, объем расходов на рекламу и т. д. другие величины непосредственно изменить не получается, например увеличить прибыль на 50 %. Такими показателями, тем не менее, можно и нужно управлять, но опосредованно, через какие-то другие величины. Например, чтобы увеличить объем выпуска, скорее всего, потребуется увеличить численность сотрудников, приобрести дополнительные производственные мощности, возможно, каким-то образом усовершенствовать технологии. На увеличение объема продаж может также повлиять снижение цены, оптимизация рекламы и маркетинга.

До сих пор все наши рассуждения носили качественный характер, мы не называли никаких чисел, а все утверждения сопровождались словами «скорее всего, возможно».

Но в нашей профессиональной деятельности мы не можем удовлетвориться лишь качественными и приблизительными рассуждениями, нас интересуют и вопросы точного, количественного характера, например:

«Верно ли, что объем продаж зависит от величины расходов на рекламу?»

«На сколько миллионов рублей увеличится объем продаж, если затраты на рекламу возрастут на один миллион рублей?»

«На сколько процентов, если затраты на рекламу возрастут на один процент?»

Поиском ответов на такие вопросы на основании числовой информации о поведении анализируемых показателей и занимается эконометрика.

Термин **«эконометрика»** появляется в литературе в начале двадцатого века и означает «эконометрические измерения». Приведем некоторые используемые в литературе определения эконометрики.

Эконометрия (эконометрика), наука, изучающая конкретные количественные взаимосвязи экономических объектов и процессов с помощью математических и статистических методов и моделей[1].

Наиболее часто используют определение эконометрики, которое предложил известный российский ученый С.А. Айвазян.

---

[1] Большой энциклопедический словарь. М: Большая рос. энцикл., 1997.

Эконометрика — это самостоятельная научная дисциплина, объединяющая совокупность теоретических результатов, приемов, методов и моделей, предназначенная для того, чтобы на базе экономической теории, экономической статистики, математико-статистического инструментария придавать конкретное количественное выражение общим закономерностям, обусловленным экономической теорией взаимосвязей экономических явлений и процессов.

В мировой науке эконометрика занимает достойное место. Свидетельством этого является присуждение за наиболее выдающиеся разработки в этой области Нобелевских премий по экономике Рагнару Фришу и Яну Тильбергену (1969), Лоуренсу Клейну (1980), Трюгве Хаавельмо (1989),Роберту Лукасу (1995),Джеймсу Хекману и Даниелю Мак-Фаддену (2000).

1.2.Типы экономических данных, используемых в эконометрических исследованиях. Специфика экономических данных

Пространственные данные характеризуют ситуацию по конкретной переменной (или набору переменных), относящейся к пространственно разделенным сходным объектам в один и тот же момент времени. Таковы, например, данные по курсам покупки или продажи наличной валюты в конкретный день по разным обменным пунктам г. Москвы. Другим примером является, скажем, набор сведений (объем производства, количество работников, доход и др.) по разным фирмам в один и тот же момент времени или период.

Временные ряды отражают изменения (динамику) какой-либо переменной на промежутке времени. В качестве примеров временных рядов можно привести ежеквартальные данные по инфляции, данные по средней заработной плате, национальному доходу и денежной эмиссии за несколько и др.

Специфика экономических данных

В эконометрике решаются задачи описания данных, оценивания, проверки гипотез, восстановления зависимостей, классификации объектов и признаков, прогнозирования, принятия статистических решений и др.

При выборе методов анализа конкретных экономических данных следует учитывать, что экономические данные обладают рядом особенностей.

Многие экономические показатели неотрицательны. Значит, их надо описывать неотрицательными случайными величинами.

В экономике доля нечисловых данных существенно выше, чем в технике и, соответственно больше применений для статистики объектов нечисловой природы.

Количество изучаемых объектов в экономическом исследовании часто ограничено в принципе, поэтому обоснование вероятностных моделей в ряде случаев затруднено.

Экономические процессы развиваются во времени, поэтому большое место в эконометрике занимают вопросы анализа и прогнозирования временных рядов, в том числе многомерных. При этом следует отметить, что временные ряды качественно отличаются от простых статистических выборок. Эти особенности состоят в следующем:

— последовательные по времени уровни временных рядов являются взаимозависимыми, особенно это относится к близко расположенным наблюдениям;

— в зависимости от момента наблюдения уровни во временных рядах обладают разной информативностью: информационная ценность наблюдений убывает по мере их удаления от текущего момента времени;

— с увеличением количества уровней временного ряда точность статистических характеристик не будет увеличиваться пропорционально числу наблюдений, а при появлении новых закономерностей развития она может даже уменьшаться.

1.3. Переменные эконометрических моделей

Переменные, участвующие в эконометрической модели, разделяются на следующие типы:

Результирующая (зависимая, эндогенная) переменная Y. Она характеризует результат или эффективность функционирования экономической системы. Значения ее формируются в процессе и внутри функционирования этой системы под воздействием ряда других переменных и факторов, часть из которых поддается регистрации, управлению и планированию. В регрессионном анализе результирующая переменная играет роль функции, значение которой определяется значениями объясняющих переменных, выполняющих роль аргументов. По своей природе результирующая переменная всегда случайна (стохастична).

Объясняющие (экзогенные, независимые) переменные X. Это — переменные, которые поддаются регистрации и описывают условия функционирования реальной экономической системы. Они в значительной мере определяют значения результирующих переменных. Обычно часть из них поддается регулированию и управлению. Значение этих переменных могут задаваться вне анализируемой системы. Поэтому их называют экзогенными. Еще их называют факторными признаками. В регрессионном анализе это аргументы результирующей функции Y. По своей природе они могут быть как случайными, так и неслучайными.

Любая эконометрическая модель предназначена для объяснения значений текущих эндогенных переменных (одной или нескольких) в зависимости от значений заранее определенных переменных.

Переменные, выступающие в системе в роли факторов-аргументов, или объясняющих переменных называют предопределенными. Множество предопределенных переменных формируется из всех экзогенных переменных и так называемых лаговых эндогенных переменных, т. е. таких эндогенных переменных, значения которых входят в уравнения анализируемой эконометрической системы измеренными в прошлые моменты времени, а, следовательно, являются уже известными, заданными.

Таким образом, исходными данными, необходимыми для построения эконометрической модели, являются известные наборы (массивы) значений зависимой переменной y и независимых факторов x_i. При этом могут использоваться два принципиально различных типа исходных информационных массивов — статический и динамический. Статический массив представляет собой значения результирующей (зависимой, объясняемой и т. п.) переменной y и влияющих на нее факторов (независимых, объясняющих переменных) x_i, имевших место у объектов однородной совокупности в определенный период времени. Примером таких объектов являются однотипные промышленные предприятия (заводы одной отраслевой направленности). В качестве y в практических исследованиях часто рассматриваются показатели производительности труда, объемов выпускаемой продукции и некоторые другие. В качестве x_i — влияющие на уровень этих показателей факторы — объемы используемых фондов, численность и квалификация рабочей силы и т. п.

Приведем другой пример статической информации, характерной для социальных исследований. В качестве y рассматриваются показатели заболеваемости (смертности) населения в регионах страны. Их уровень в каждом из регионов определяют значения независимых факторов, отражающих достигнутый материальный уровень жизни, климатические условия, состояние окружающей среды и т. п. В этом случае необходимая для построения эконометрической модели информация собирается по совокупности регионов страны за фиксированный промежуток времени (год).

Для традиционных направлений исследований проблема обоснования состава показателей обычно считается решенной. Например, в исследованиях производительности труда, макроэкономическом анализе обычно рассматриваются уже устоявшиеся наборы показателей, значения которых публикуются в статистических сборниках, научных отчетах и т. п. Их примером являются выработка на одного работающего как показатель, выражающий явление «производительность труда», объемы ВВП (показатель результативности экономики), объем основных фондов (показатель уровня материальной обеспеченности производственного процесса, экономики) и т. д.

Вместе с тем, в ряде областей эконометрических исследований такие системы показателей не могут быть сформированы столь однозначно. Часто одно и то же явление может быть выражено альтернативными вариантами показателей. Например, общий показатель заболеваемости в регионе за год может быть выражен суммарным числом заболеваний населения в течение этого периода времени. С другой стороны, в качестве меры заболеваемости может выступать и показатель, выраженный в виде суммарного количества дней продолжительности болезней.

Однако в обоих этих случаях не учитывается степень тяжести болезни. Попытка такого учета приводит к необходимости расчета средневзвешенного показателя заболеваемости, но здесь сразу возникает проблема обоснования адекватных «весов». Тяжесть болезни может определяться, например, по степени ее опасности, рассчитываемой как доля обусловленных ею смертных случаев в общем их количестве; на основании субъективного показателя «дискомфортности» состояния больного и т. п.

Аналогичные проблемы должны быть решены при обосновании показателей климата. Для этих целей обычно используются средняя температура воздуха, влажность, число солнечных дней в году и т. п., а также построенные на их основе некоторые комплексные характеристики.

Заметим, что в отсутствие объективных данных в эконометрических исследованиях допускается замена одного показателя другим, косвенно отражающим то же явление. Например, среднедушевой доход как показатель материального уровня жизни может быть заменен на среднегодовой товарооборот на одного жителя региона и т. п.

Неправильный выбор показателя, представляющего рассматриваемое явление в модели, может существенно повлиять на ее качество. В этой связи к проблеме обоснования состава показателей (переменных) эконометрической модели на практике следует относиться с предельным вниманием.

1.4. Типы эконометрических моделей

Можно выделить три основных класса моделей, которые применяются для анализа и прогнозирования экономических систем:

- модели временных рядов;
- регрессионные модели с одним уравнением;
- системы одновременных уравнений.

Модели временных рядов

Модели временных рядов представляют собой модели зависимости результативного признака от времени. К ним относятся:

- модели кривых роста (трендовые модели),
- адаптивные модели,
- модели авторегрессии и скользящего среднего.

С помощью таких моделей можно решать задачи прогнозирования объема продаж, спроса на продукцию, краткосрочного прогноза процентных ставок и др.

Регрессионные модели с одним уравнением

В регрессионных моделях зависимая (объясняемая) переменная Y может быть представлена в виде функции $f(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_k)$, где $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_k)$ — независимые (объясняющие) переменные, или факторы; k — количество факторов. В качестве зависимой переменной может выступать практически любой показатель, характеризующий, например, деятельность предприятия или курс ценной бумаги. В зависимости от вида функции $f(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_k)$ модели делятся на линейные и нелинейные. В зависимости от количества включенных в модель факторов X модели делятся на однофакторные (парная модель регрессии) и многофакторные (модель множественной регрессии).

Примеры задач, решаемых с помощью регрессионных моделей:

Исследование зависимости заработной платы (Y) от возраста (X_1), уровня образования (X_2), пола (X_3), стажа работы (X_4) ($y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4$).

Прогноз и планирование выпускаемой продукции по факторам производства (производственная функция Кобба-Дугласа $y = a_0K^{a_1}L^{a_2}$ означает, что объем выпуска продукции (Y), является функцией количества капитала(K) и количества (L) труда).

Прогноз объемов потребления продукции или услуг определенного вида (кривая Энгеля $y = \dfrac{a_0}{1 + a_1e^{-a_2x}}$, где YX_1, X_2X_3 — удельная величина спроса, X — среднедушевой доход).

Системы эконометрических уравнений

Сложные социально-экономические явления иногда невозможно адекватно описать с помощью только одного соотношения (уравнения). Модели с одним уравнением не отражают взаимосвязей между объясняющими переменными или их связей с другими переменными. Кроме того, некоторые переменные могут оказывать взаимные воздействия и трудно однозначно определить, какая из них является зависимой, а какая независимой переменной. Поэтому при построении эконометрической модели прибегают к системам уравнений.

Для оценивания систем одновременных уравнений используются специальные методы.

Эконометрические методы используются в экономических и технико-экономических исследованиях, работах по управлению (менеджменту).

Каждой области экономических исследований, связанной с анализом эмпирических данных, как правило, соответствуют свои эконометрические модели.

1.5. Примеры постановки задач, для решения которых используются эконометрические методы

Оценка эффективности рекламы

При оценке влияния рекламы на спрос и продукцию проводятся маркетинговые исследования, основанные на опросе потенциальных покупателей и на статистике покупок в динамике. При этом часто представляется возможным непосредственно измерить величины, определяющие поведение покупателя (факторы), а иногда нам неизвестны даже число и содержательный смысл факторов. Для измерений могут быть доступны иные величины, тем или иным способом зависящие от этих факторов. При этом, когда влияние неизвестных факторов проявляется в нескольких измеряемых признаках, эти признаки могут обнаруживать тесную связь между собой (например, корреляционную), поэтому общее число факторов может быть гораздо меньше, чем число измеряемых переменных, которое обычно выбирается исследователем в той или иной мере произвольно. Для обнаружения влияющих на измеряемые переменные факторов используются методы факторного анализа.

Для оценки влияния прироста объемов покупок в зависимости от затрат на рекламу естественно воспользоваться регрессионной моделью с распределенными лагами, поскольку объемы закупок зависят не только (и не столько) от затрат на рекламу в данный момент, но и от затрат в предыдущие периоды времени. Для построения модели достаточно иметь информацию о продажах и затратах на рекламу в течение некоторого времени. Построенная модель позволяет получить прогноз объема продаж и выбрать стратегию затрат на рекламу в динамике.

Оценить эффективность рекламы достаточно сложно, так как она зависит от влияния многих внутренних и внешних факторов (уровень доходов населения, его изменение, поведение конкурентов, изменение политической и экономической ситуации и др.). Для оценки эффективности рекламы применяют корреляционный и регрессионный анализ, на основе кластерного и факторного анализа.

Применение эконометрических моделей при определении рекламных бюджетов

Наиболее типичным способом моделирования рынка является построение регрессионной зависимости, самой простой из которых является линейная регрессия, которую можно представить в виде

$$y = a_0 + a_1 x,$$

где y — общий объем продаж; a_0 — минимальный объем продаж при условии полного отсутствия рекламной поддержки; a_1 — эмпирический коэффициент «чувствительности» объема продаж к объему рекламных расходов; x — объем затрат на рекламу.

Эта модель обладает несомненным плюсом — простотой, однако содержит и ряд очевидных недостатков. В частности, в модели используется предпосылка о постоянной отдаче от рекламы, что не соответствует истине; из нее следуют нереалистичные выводы в случае рекламных расходов, стремящихся к бесконечности. Кроме того, модель не предполагает возможности улучшения (угол кривой постоянен).

Для решения этих проблем можно использовать другой вид зависимости, аименно нелинейную (степенную) регрессию вида

$$y = a_0 + a_1 x^b y \ (0 < \mathrm{b} < 1),$$

где b — эластичность продаж по рекламе.

В этой модели уже учтен эффект изменяющейся отдачи, возможно применение методов предельного анализа и оптимизации. В случае усиления модели и введения других переменных (других составляющих маркетинг-микса) учитывается взаимный мультиплицирующий эффект воздействия маркетинговых мероприятий. В результате модель преобразуется в многофакторную регрессию, а оптимальное распределение коммуникационного бюджета между всеми факторами будет соответствовать отношению эластичностей соответствующих переменных.

Существуют и другие модели, предсказывающие рыночные изменения в результате рекламных мероприятий.

Построение работающей модели может значительно упростить процесс принятия решения о размере маркетингового бюджета, однако является весьма непростой задачей.

Эконометрические технологии в управлении клиентами (CRM)

Изучение поведения клиента является важной задачей маркетологов, продавцов, сервис-менеджеров, аналитиков во многих отраслях экономики. Действительно, клиент — это основной источник прибыли любой организации. И от количества клиентов напрямую зависит доход организации. В последнее время в Интернете появилось большое количество ресурсов по CRM, постоянно проводятся исследования рынка и презентации новых продуктов по анализу поведения клиента.

Проанализировав данные, можно получить следующие результаты:

- возможности анализа поведения клиентов;
- прогнозирование дальнейшего поведения клиентов;
- планирование маркетинговых кампаний;
- всесторонний анализ причин потери клиентов;
- сегментация клиентов;
- стратегия компании в отношении различных групп клиентов

Имея перед глазами готовую модель разделения клиентов по группам, можно без труда разработать наиболее эффективную стратегию компании. Предоставляя скидки различным группам клиентов и позиционируя новый товар, можно добиться увеличения прибыли организации.

Прогноз денежных поступлений от продаж полисов, количества полисов

Множественный регрессионный анализ позволяют найти функциональную зависимость продаж полисов от различных показателей. Используя построенные уравнения, можно прогнозировать изменения выбранных показателей в зависимости от изменения других показателей. С помощью того или иного программного продукта получают уравнение зависимости в явном виде, а также доверительные интервалы, оценку точности решения и оценку адекватности с помощью всестороннего графического и аналитического анализа остатков.

Стоимость аренды недвижимости в зависимости от различных факторов

Имея базу данных по рынку недвижимости сдаваемой в аренду, можно построить регрессионную модель зависимости величины арендной платы от различных факторов. Полученная модель может найти различные применения при:

- оценке арендной платы по параметрам объекта;
- оценке правильности выставленной арендной платы;
- выявлении факторов, влияющих на арендную плату наибольшим и наименьшим образом;
- наличии данных, собранных в разные моменты времени, можно выявить факторы, значение которых возрастает или уменьшается в плане влияния на размер арендной платы.

В качестве зависимой переменной выступает Арендная плата.

В качестве независимых могут быть использованы следующие переменные:

- район (центр, окраина);
- общая площадь и полезная площадь в $м^2$;
- состояние помещения (отличное, хорошее, удовлетворительное);
- состояние здания (отличное, хорошее, удовлетворительное);
- назначение (магазин, офис, склад, разное);
- наличие дополнительных услуг — водоснабжения, канализации, доп. телефонных линий и проч. (есть, нет);
- ориентация окон (во двор, на улицу, во двор и на улицу);
- срок аренды (менее года, год, более года);
- высота потолков в м;
- количество этажей в здании;
- этаж, на котором находится объект (подвал, первый этаж, второй этаж и выше) и др.

2. ПАРНАЯ РЕГРЕССИЯ И КОРРЕЛЯЦИЯ

Парная регрессия представляет собой регрессию между двумя переменными — y и x, т. е. модель вида:

$$\hat{y} = f(x).$$

где y — зависимая переменная (результативный признак); x — независимая, или объясняющая, переменная (признак-фактор). Знак «^» означает, что между переменными x и y нет строгой функциональной зависимости, поэтому практически в каждом отдельном случае величина y складывается из двух слагаемых:

$$y = \hat{y}_x + \varepsilon,$$

где y — фактическое значение результативного признака; $\hat{y}_x$ — теоретическое значение результативного признака, найденное исходя из уравнения регрессии; ε — случайная величина, характеризующая отклонения реального значения результативного признака от теоретического, найденного по уравнению регрессии.

Случайная величина ε называется также возмущением. Она включает влияние не учтенных в модели факторов, случайных ошибок и особенностей измерения. Ее присутствие в модели порождено тремя источниками: спецификацией модели, выборочным характером исходных данных, особенностями измерения переменных.

От правильно выбранной спецификации модели зависит величина случайных ошибок: они тем меньше, чем в большей мере теоретические значения результативного признака $\hat{y}_x$, подходят к фактическим данным y.

К ошибкам спецификации относятся неправильный выбор той или иной математической функции для $\hat{y}_x$ и недоучет в уравнении регрессии какого-либо существенного фактора, т. е. использование парной регрессии вместо множественной.

Наряду с ошибками спецификации могут иметь место ошибки выборки, которые имеют место в силу неоднородности данных в исходной статистической совокупности, что, как правило, бывает при изучении экономических процессов. Если совокупность неоднородна, то уравнение регрессии не имеет практического смысла. Для получения хорошего результата обычно исключают из совокупности единицы с аномальными значениями исследуемых признаков. И в этом случае результаты регрессии представляют собой выборочные характеристики.

Использование временной информации также представляет собой выборку из всего множества хронологических дат. Изменив временной интервал, можно получить другие результаты регрессии.

Наибольшую опасность в практическом использовании методов регрессии представляют ошибки измерения. Если ошибки спецификации можно уменьшить, изменяя форму модели (вид математической формулы), а ошибки выборки — увеличивая объем исходных данных, то ошибки измерения практически сводят на нет все усилия по количественной оценке связи между признаками.

Особенно велика роль ошибок измерения при исследовании на макроуровне. Так, в исследованиях спроса и потребления в качестве объясняющей переменной широко используется «доход на душу населения». Вместе с тем, статистическое измерение величины дохода сопряжено с рядом трудностей и не лишено возможных ошибок, например, в результате наличия скрытых доходов.

Предполагая, что ошибки измерения сведены к минимуму, основное внимание в эконометрических исследованиях уделяется ошибкам спецификации модели.

В парной регрессии выбор вида математической функции $\hat{y}_x = f(x)$ может быть осуществлен тремя методами:

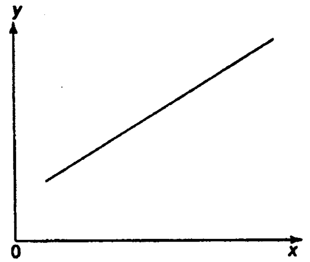
1. графическим;
2. аналитическим, т. е. исходя из теории изучаемой взаимосвязи;
3. экспериментальным.

При изучении зависимости между двумя признаками графический метод подбора вида уравнения регрессии достаточно нагляден. Он основан на поле корреляции. Основные типы кривых, используемые при количественной оценке связей, представлены на рисунке 2.1.

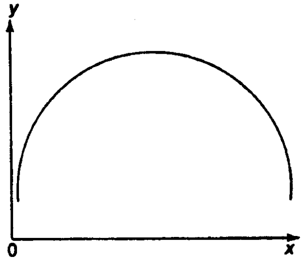
Значительный интерес представляет аналитический метод выбора типа уравнения регрессии. Он основан на изучении материальной природы связи исследуемых признаков.

При обработке информации на компьютере выбор вида уравнения регрессии обычно осуществляется экспериментальным методом, т. е. путем сравнения величины остаточной дисперсии $\sigma^2_{\text{ост}}$, рассчитанной при разных моделях.

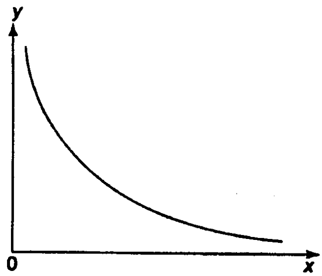
Если уравнение регрессии проходит через все точки корреляционного поля, что возможно только при функциональной связи, когда все точки лежат на линии регрессии $\hat{y}_x = f(x)$, то фактические значения результативного признака совпадают с теоретическими $y = \hat{y}_x$, т. е. они полностью обусловлены влиянием фактора *x*. В этом случае остаточная дисперсия $\sigma^2_{\text{ост}} = 0$.



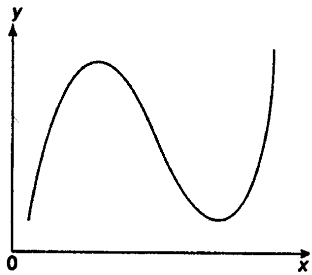
$\hat{y}_x = a + b \cdot x$



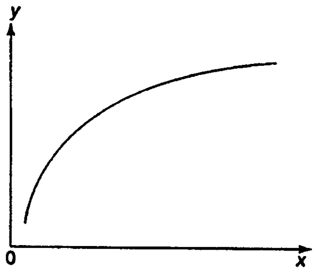
$\hat{y}_x = a + b \cdot x + c \cdot x^2$



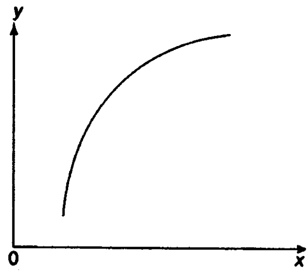
$\hat{y}_x = a + b/x$



$\hat{y}_x = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + d \cdot x^3$



$\hat{y}_x = a \cdot x^b$



$\hat{y}_x = a \cdot b^x$

Рисунок 2.1 — Основные типы кривых, используемые при количественной оценке связей между двумя переменными

В практических исследованиях, как правило, имеет место некоторое рассеяние точек относительно линии регрессии. Оно обусловлено влиянием прочих, не учитываемых в уравнении регрессии, факторов. Иными словами, имеют место отклонения фактических данных от теоретических $(y - \hat{y}_x)$. Величина этих отклонений и лежит в основе расчета остаточной дисперсии:

$$\sigma^2_{\text{ост}} = \frac{1}{n}\sum (y - \hat{y}_x)^2 .$$

Чем меньше величина остаточной дисперсии, тем меньше влияние не учитываемых в уравнении регрессии факторов и тем лучше уравнение регрессии подходит к исходным данным.

Считается, что число наблюдений должно в 7–8 раз превышать число рассчитываемых параметров при переменной *x*. Это означает, что искать линейную регрессию, имея менее 7 наблюдений, вообще не имеет смысла. Если вид функции усложняется, то требуется увеличение объема наблюдений, ибо каждый параметр при *x* должен рассчитываться хотя бы по 7 наблюдениям. Значит, если мы выбираем параболу второй степени $\hat{y}_x = a + b \cdot x + c \cdot x^2$, то требуется объем информации уже не менее 14 наблюдений.

2.1. Линейная модель парной регрессии и корреляции

Рассмотрим простейшую модель парной регрессии — линейную регрессию. Линейная регрессия находит широкое применение в эконометрике ввиду четкой экономической интерпретации ее параметров.

Линейная регрессия сводится к нахождению уравнения вида

$$\hat{y}_x = a + b \cdot x \quad \text{или} \quad y = a + b \cdot x + \varepsilon . \tag{2.1}$$

Уравнение вида $\hat{y}_x = a + b \cdot x$ позволяет по заданным значениям фактора x находить теоретические значения результативного признака, подставляя в него фактические значения фактора *x*.

Построение линейной регрессии сводится к оценке ее параметров — *a* и *b*. Классический подход к оцениванию параметров линейной регрессии основан на методе наименьших квадратов (МНК). МНК позволяет получить такие оценки параметров *a* и *b*, при которых сумма квадратов отклонений фактических значений результативного признака *y* от теоретических $\hat{y}_x$ минимальна:

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_{x_i})^2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 \;\to\; \min . \tag{2.2}$$

Т. е. из всего множества линий линия регрессии на графике выбирается так, чтобы сумма квадратов расстояний по вертикали между точками и этой линией была бы минимальной (рис. 2.2).

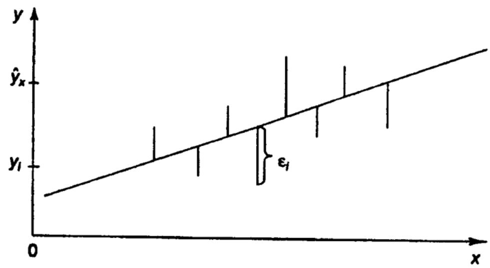


Рисунок 2.2 — Линия регрессии с минимальной дисперсией остатков

Ковариация — числовая характеристика совместного распределения двух случайных величин, равная математическому ожиданию произведения отклонений этих случайных величин от их математических ожиданий. Дисперсия — характеристика случайной величины, определяемая как математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания. Математическое ожидание — сумма произведений значений случайной величины на соответствующие вероятности.

Параметр b называется коэффициентом регрессии. Его величина показывает среднее изменение результата с изменением фактора на одну единицу.

Возможность четкой экономической интерпретации коэффициента регрессии сделала линейное уравнение регрессии достаточно распространенным в эконометрических исследованиях.

Формально a — значение y при $x = 0$. Если признак-фактор x не может иметь нулевого значения, то вышеуказанная трактовка свободного члена a не имеет смысла, т. е. параметр a может не иметь экономического содержания.

Таким образом, уравнение регрессии можно рассчитать с помощью следующих формул:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x,\ \bar{y} = \frac{1}{n}\sum y,\ \overline{y \cdot x} = \frac{1}{n}\sum y \cdot x,\ \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum x^2. \qquad (2.3)$$

$$b = \frac{\operatorname{cov}\ x,\ y}{\sigma_x^2} = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{26{,}09 - 8{,}95 \cdot 2{,}34}{30{,}56} = \qquad (2.4)$$

где $\operatorname{cov}(x, y) = \overline{y \cdot x} - \overline{y} \cdot \overline{x}$ — *ковариация признаков x и y*, $\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$ — *дисперсия признака x*.

$$a = \overline{y} - b \cdot \overline{x}. \tag{2.5}$$

Уравнение регрессии всегда дополняется показателем тесноты связи. При использовании линейной регрессии в качестве такого показателя выступает линейный коэффициент корреляции r_{xy}, который можно рассчитать по следующим формулам:

$$r_{xy} = b \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}. \tag{2.6}$$

Линейный коэффициент корреляции находится в пределах: $-1 \le r_{xy} \le 1$. Чем ближе абсолютное значение r_{xy} к единице, тем сильнее линейная связь между факторами (при $r_{xy} = \pm 1$ имеем строгую функциональную зависимость). Но следует иметь в виду, что близость абсолютной величины линейного коэффициента корреляции к нулю еще не означает отсутствия связи между признаками. При другой (нелинейной) спецификации модели связь между признаками может оказаться достаточно тесной.

Для оценки качества подбора линейной функции рассчитывается квадрат линейного коэффициента корреляции r_{xy}^2, называемый коэффициентом детерминации. Коэффициент детерминации характеризует долю дисперсии результативного признака *y*, объясняемую регрессией, в общей дисперсии результативного признака:

$$r_{xy}^2 = 1 - \frac{\sigma_{\text{ост}}^2}{\sigma_y^2}, \tag{2.7}$$

где $\sigma_{\text{ост}}^2 = \frac{1}{n}\sum (y - \hat{y}_x)^2$, $\sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum (y - \overline{y})^2 = \overline{y^2} - \overline{y}^2$.

Соответственно величина $1 - r_{xy}^2$ характеризует долю дисперсии *y*, вызванную влиянием остальных, не учтенных в модели, факторов.

После того как найдено уравнение линейной регрессии, проводится оценка значимости как уравнения в целом, так и отдельных его параметров.

Проверить значимость уравнения регрессии — значит установить, соответствует ли математическая модель, выражающая зависимость между переменными, экспериментальным данным и достаточно ли включенных в уравнение объясняющих переменных (одной или нескольких) для описания зависимой переменной.

Чтобы иметь общее суждение о качестве модели из относительных отклонений по каждому наблюдению, определяют среднюю ошибку аппроксимации:

$$\bar{A} = \frac{1}{n}\sum\left|\frac{y-\hat{y}_x}{y}\right|\cdot 100\% . \qquad (2.8)$$

Средняя ошибка аппроксимации не должна превышать 8–10 %.

Оценка значимости уравнения регрессии в целом производится на основе F-критерия Фишера, которому предшествует дисперсионный анализ. В математической статистике дисперсионный анализ рассматривается как самостоятельный инструмент статистического анализа. В эконометрике он применяется как вспомогательное средство для изучения качества регрессионной модели.

Согласно основной идее дисперсионного анализа, общая сумма квадратов отклонений переменной y от среднего значения $\bar{y}$ раскладывается на две части — «объясненную» и «необъясненную»:

$$\sum\left(y-\bar{y}\right)^2 = \sum\left(\hat{y}_x-\bar{y}\right)^2 + \sum\left(y-\hat{y}_x\right)^2,$$

где $\sum\left(y-\bar{y}\right)^2$ — общая сумма квадратов отклонений; $\sum\left(\hat{y}_x-\bar{y}\right)^2$ — сумма квадратов отклонений, объясненная регрессией (или факторная сумма квадратов отклонений); $\sum\left(y-\hat{y}_x\right)^2$ — остаточная сумма квадратов отклонений, характеризующая влияние неучтенных в модели факторов.

Схема дисперсионного анализа имеет вид, представленный в таблице 2.1 (n — число наблюдений, m — число параметров при переменной x).

Таблица 2.1 — Схема дисперсионного анализа

Компоненты дисперсии	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Дисперсия на одну степень свободы
Общая	$\sum\left(y-\bar{y}\right)^2$	$n-1$	$S^2_{\text{общ}} = \frac{\sum\left(y-\bar{y}\right)^2}{n-1}$
Факторная	$\sum\left(\hat{y}_x-\bar{y}\right)^2$	m	$S^2_{\text{факт}} = \frac{\sum\left(\hat{y}_x-\bar{y}\right)^2}{m}$
Остаточная	$\sum\left(y-\hat{y}_x\right)^2$	$n-m-1$	$S^2_{\text{ост}} = \frac{\sum\left(y-\hat{y}_x\right)^2}{n-m-1}$

Определение дисперсии на одну степень свободы приводит дисперсии к сравнимому виду. Сопоставляя факторную и остаточную дисперсии в расчете на одну степень свободы, получим величину F-критерия Фишера:

$$F = \frac{S^2_{\text{факт}}}{S^2_{\text{ост}}}. \tag{2.9}$$

Фактическое значение F-критерия Фишера (2.9) сравнивается с табличным значением $F_{\text{табл}}$ (a; k_1; k_2) при уровне значимости a и степенях свободы $k_1 = m$ и $k_2 = n - m - 1$. При этом, если фактическое значение F-критерия больше табличного, то признается статистическая значимость уравнения в целом.

Для парной линейной регрессии $m = 1$, поэтому

$$F = \frac{S^2_{\text{факт}}}{S^2_{\text{ост}}} = \frac{\sum \left(\hat{y}_x - \bar{y}\right)^2}{\sum \left(y - \hat{y}_x\right)^2} \cdot \left(n - 2\right). \tag{2.10}$$

Величина F-критерия связана с коэффициентом детерминации r^2_{xy}, и ее можно рассчитать по следующей формуле:

$$F = \frac{r^2_{xy}}{1 - r^2_{xy}} \cdot \left(n - 2\right). \tag{2.11}$$

В парной линейной регрессии оценивается значимость не только уравнения в целом, но и отдельных его параметров. С этой целью по каждому из параметров определяется его стандартная ошибка: m_b и m_a.

Стандартная ошибка коэффициента регрессии определяется по формуле:

$$m_b = \sqrt{\frac{S^2_{\text{ост}}}{\sum \left(x - \bar{x}\right)^2}} = \frac{S_{\text{ост}}}{\sigma_x \cdot \sqrt{n}}, \tag{2.12}$$

где $S^2_{\text{ост}} = \dfrac{\sum \left(y - \hat{y}_x\right)^2}{n - 2}$ — остаточная дисперсия на одну степень свободы.

Величина стандартной ошибки совместно с t-распределением Стьюдента при n –2 степенях свободы применяется для проверки существенности коэффициента регрессии и для расчета его доверительного интервала.

Для оценки существенности коэффициента регрессии его величина сравнивается с его стандартной ошибкой, т. е. определяется фактическое значение

t-критерия Стьюдента: $t_b = \dfrac{b}{m_b}$, которое затем сравнивается с табличным значением при определенном уровне значимости α и числе степеней свободы $(n - 2)$. Доверительный интервал для коэффициента регрессии определяется как $b \pm t_{\text{табл}} \cdot m_b$. Поскольку знак коэффициента регрессии указывает на рост результативного признака y при увеличении признака-фактора x ($b > 0$), уменьшение результативного признака при увеличении признака-фактора ($b < 0$) или его независимость от независимой переменной ($b = 0$) (см. рис. 2.3), то границы доверительного интервала для коэффициента регрессии не должны содержать противоречивых результатов, например, $-1{,}5 \le b \le 0{,}8$. Такого рода запись указывает, что истинное значение коэффициента регрессии одновременно содержит положительные и отрицательные величины и даже ноль, чего не может быть.

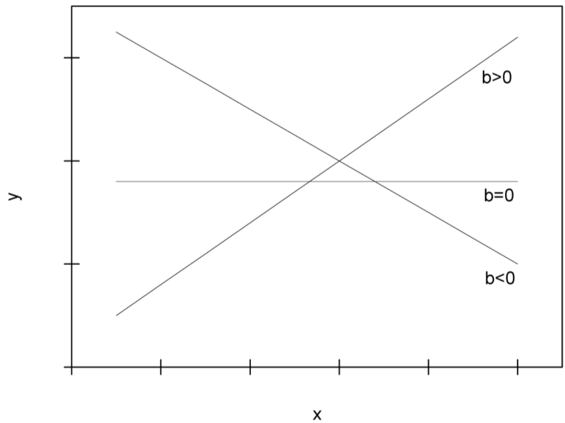


Рисунок 2.3 — Наклон линии регрессии в зависимости от значения параметра b

Стандартная ошибка параметра a определяется по формуле:

$$m_a = \sqrt{S_{\text{ост}}^2 \cdot \frac{\sum x^2}{n \cdot \sum (x - \overline{x})^2}} = S_{\text{ост}} \cdot \frac{\sqrt{\sum x^2}}{\sigma_x \cdot n}. \qquad (2.13)$$

Процедура оценивания существенности данного параметра не отличается от рассмотренной выше для коэффициента регрессии. Вычисляется t-критерий: $t_a = \dfrac{a}{m_a}$, его величина сравнивается с табличным значением при $n - 2$ степенях свободы.

Значимость линейного коэффициента корреляции проверяется на основе величины ошибки коэффициента корреляции m_r:

$$m_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}. \tag{2.14}$$

Фактическое значение t-критерия Стьюдента определяется как $t_r = \frac{r}{m_r}$.

Существует связь между t-критерием Стьюдента и F-критерием Фишера:

$$t_b = t_r = \sqrt{F}. \tag{2.15}$$

В прогнозных расчетах по уравнению регрессии определяется предсказываемое $\hat{y}_p$ значение как точечный прогноз $\hat{y}_x$ при $x_p = x_k$, т. е. путем подстановки в уравнение регрессии $\hat{y}_x = a + b \cdot x$ соответствующего значения x. Однако точечный прогноз явно не реален. Поэтому он дополняется расчетом стандартной ошибки $\hat{y}_p$, т. е. $m_{\hat{y}_p}$, и соответственно интервальной оценкой прогнозного значения $\hat{y}_p$:

$$\hat{y}_p - \Delta_{\hat{y}_p} \le \hat{y}_p \le \hat{y}_p + \Delta_{\hat{y}_p},$$

где $\Delta_{\hat{y}_p} = m_{\hat{y}_p} \cdot t_{\text{табл}}$, а $m_{\hat{y}_p}$ — средняя ошибка прогнозируемого индивидуального значения:

$$m_{\hat{y}_p} = S_{\text{ост}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{{x_p - \bar{x}}^{\,2}}{n \cdot \sigma_x^2}}. \tag{2.16}$$

Пример. По данным проведенного опроса восьми групп семей известны данные связи расходов населения на продукты питания с уровнем доходов семьи.

Таблица 2.2 — Связь расходов населения на продукты питания с уровнем доходов семьи

Расходы на продукты питания, y, тыс. руб.	0,9	1,2	1,8	2,2	2,6	2,9	3,3	3,8
Доходы семьи, x, тыс. руб.	1,2	3,1	5,3	7,4	9,6	11,8	14,5	18,7

Предположим, что связь между доходами семьи и расходами на продукты питания линейная. Для подтверждения нашего предположения построим поле корреляции (рис. 2.4).

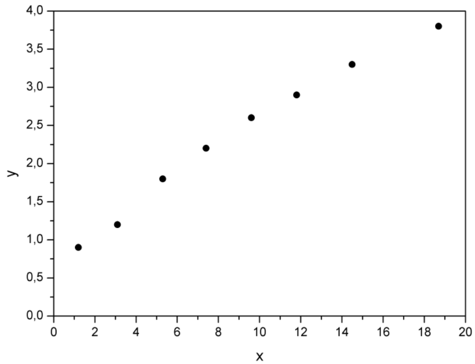


Рисунок 2.4 — Поле корреляции

По графику видно, что точки выстраиваются в некоторую прямую линию. Для удобства дальнейших вычислений составим таблицу (табл. 2.3).

Таблица 2.3 — Расчет промежуточных данных

	x	y	$x \cdot y$	x^2	y^2	$\hat{y}_x$	$y-\hat{y}_x$	$(y-\hat{y}_x)^2$	A_i, %
1	1,2	0,9	1,08	1,44	0,81	1,038	–0,138	0,0190	15,33
2	3,1	1,2	3,72	9,61	1,44	1,357	–0,157	0,0246	13,08
3	5,3	1,8	9,54	28,09	3,24	1,726	0,074	0,0055	4,11
4	7,4	2,2	16,28	54,76	4,84	2,079	0,121	0,0146	5,50
5	9,6	2,6	24,96	92,16	6,76	2,449	0,151	0,0228	5,81
6	11,8	2,9	34,22	139,24	8,41	2,818	0,082	0,0067	2,83
7	14,5	3,3	47,85	210,25	10,89	3,272	0,028	0,0008	0,85
8	18,7	3,8	71,06	349,69	14,44	3,978	–0,178	0,0317	4,68
Итого	71,6	18,7	208,71	885,24	50,83	18,717	–0,017	0,1257	52,19
Среднее значение	8,95	2,34	26,09	110,66	6,35	2,34	–	0,0157	6,52
σ	5,53	0,935	—	—	—	—	—	—	—
σ^2	30,56	0,874	—	—	—	—	—	—	—

Рассчитаем параметры линейного уравнения парной регрессии $\hat{y}_x = a + b \cdot x$. Для этого воспользуемся формулами (2.4–2.5):

$$b=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x^2}=\frac{\overline{x\cdot y}-\bar{x}\cdot\bar{y}}{\overline{x^2}-\bar{x}^2}=\frac{26{,}09-8{,}95\cdot 2{,}34}{30{,}56}=0{,}168;$$

$$a=\bar{y}-b\cdot\bar{x}=2{,}34-0{,}168\cdot 8{,}95=0{,}836.$$

Получили уравнение: $\hat{y}_x=0{,}836+0{,}168\cdot x$. Т. е. с увеличением дохода семьи на 1000 руб. расходы на питание увеличиваются на 168 руб.

Как было указано выше, уравнение линейной регрессии всегда дополняется показателем тесноты связи — линейным коэффициентом корреляции r_{xy}:

$$r_{xy}=b\cdot\frac{\sigma_x}{\sigma_y}=0{,}168\cdot\frac{5{,}53}{0{,}935}=0{,}994.$$

Близость коэффициента корреляции к 1 указывает на тесную линейную связь между признаками.

Коэффициент детерминации $r_{xy}^2=0{,}987$ (примерно тот же результат получим, если воспользуемся формулой (2.7)) показывает, что уравнением регрессии объясняется 98,7 % дисперсии результативного признака, а на долю прочих факторов приходится лишь 1,3 %.

Оценим качество уравнения регрессии в целом с помощью F-критерия Фишера. Сосчитаем фактическое значение F-критерия:

$$F=\frac{r_{xy}^2}{1-r_{xy}^2}\cdot(n-2)=\frac{0{,}987}{1-0{,}987}\cdot 6=455{,}54.$$

Табличное значение ($k_1=1$, $k_2=n-2=6$, $\alpha=0{,}05$) : $F_{\text{табл}}=5{,}99$. Так как $F_{\text{факт}}>F_{\text{табл}}$, то признается статистическая значимость уравнения в целом.

Для оценки статистической значимости коэффициентов регрессии и корреляции рассчитаем t-критерий Стьюдента и доверительные интервалы каждого из показателей. Рассчитаем случайные ошибки параметров линейной регрессии и коэффициента корреляции $\left(S_{\text{ост}}^2=\frac{\sum(y-\hat{y}_x)^2}{n-2}=\frac{0{,}1257}{8-2}=0{,}021\right)$:

$$m_b=\frac{S_{\text{ост}}}{\sigma_x\cdot\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{0{,}021}}{5{,}53\cdot\sqrt{8}}=0{,}0093;$$

$$m_a = S_{\text{ост}} \cdot \frac{\sqrt{\sum x^2}}{\sigma_x \cdot n} = \frac{\sqrt{0{,}021 \cdot 885{,}24}}{5{,}53 \cdot 8} = 0{,}0975;$$

$$m_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{1-0{,}987}{6}} = 0{,}0465.$$

Фактические значения t-статистик: $t_b = \frac{0{,}168}{0{,}0093} = 18{,}065$, $t_a = \frac{0{,}836}{0{,}0975} = 8{,}574$, $t_r = \frac{0{,}994}{0{,}0465} = 21{,}376$. Табличное значение t-критерия Стьюдента при α = 0,05 и числе степеней свободы $v = n - 2 = 6$ есть $t_{\text{табл}} = 2{,}447$. Так как $t_b > t_{\text{табл}}$, $t_a > t_{\text{табл}}$ и $t_r > t_{\text{табл}}$, то признаем статистическую значимость параметров регрессии и показателя тесноты связи. Рассчитаем доверительные интервалы для параметров регрессии a и b: $a \pm tm_a$ и $b \pm tm_b$. Получим, что $a \in\ 0{,}597;\ \ 1{,}075$ и $b \in\ 0{,}145;\ \ 0{,}191$.

Средняя ошибка аппроксимации (находим с помощью столбца 10 таблицы 2.3; $A_i = \left| \frac{y_i - \hat{y}_{x_i}}{y_i} \right| \cdot 100\%$) $\bar{A} = 6{,}52\%$ говорит о хорошем качестве уравнения регрессии, т. е. свидетельствует о хорошем подборе модели к исходным данным.

И, наконец, найдем прогнозное значение результативного фактора $\hat{y}_p$ при значении признака-фактора, составляющем 110% от среднего уровня $x_p = 1{,}1 \cdot \bar{x} = 1{,}1 \cdot 8{,}95 = 9{,}845$, т. е. найдем расходы на питание, если доходы семьи составят 9,85 тыс. руб.

$$\hat{y}_p = 0{,}836 + 0{,}168 \cdot 9{,}845 = 2{,}490 \text{ (тыс. руб.)}$$

Значит, если доходы семьи составят 9,845 тыс. руб., то расходы на питание будут 2,490 тыс. руб.

Найдем доверительный интервал прогноза. Ошибка прогноза

$$m_{\hat{y}_p} = S_{\text{ост}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{x_p - \bar{x}^{\ 2}}{n \cdot \sigma_x^2}} = \sqrt{0{,}021 \cdot \left(1 + \frac{1}{8} + \frac{9{,}845 - 8{,}95^{\ 2}}{8 \cdot 30{,}56}\right)} = 0{,}154,$$

а доверительный интервал ($\hat{y}_p - \Delta_{\hat{y}_p} \le \hat{y}_p \le \hat{y}_p + \Delta_{\hat{y}_p}$):

$$2{,}113 < \hat{y}_p < 2{,}867 .$$

Т. е. прогноз является статистически надежным.

Теперь на одном графике изобразим исходные данные и линию регрессии (рис. 2.5).

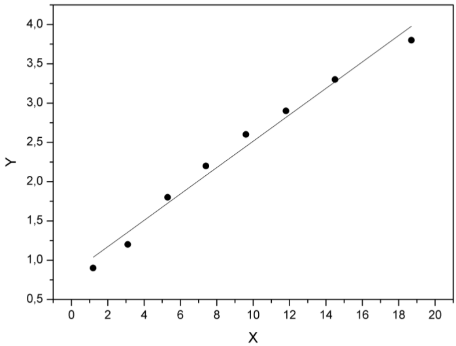


Рисунок 2.5 — Исходные данные и линия регрессии

2.2. Нелинейные модели парной регрессии и корреляции

Если между экономическими явлениями существуют нелинейные соотношения, то они выражаются с помощью соответствующих нелинейных функций.

Различают два класса нелинейных регрессий:

1. Регрессии, нелинейные относительно включенных в анализ объясняющих переменных, но линейные по оцениваемым параметрам, например:

— полиномы различных степеней — $\hat{y}_x = a + b \cdot x + c \cdot x^2$, $\hat{y}_x = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + d \cdot x^3$;

— равносторонняя гипербола — $\hat{y}_x = a + b/x$;

— полулогарифмическая функция — $\hat{y}_x = a + b \cdot \ln x$.

2. Регрессии, нелинейные по оцениваемым параметрам, например

— степенная — $\hat{y}_x = a \cdot x^b$;

— показательная — $\hat{y}_x = a \cdot b^x$;

— экспоненциальная — $\hat{y}_x = \mathrm{e}^{a+b\cdot x}$.

Регрессии нелинейные по включенным переменным приводятся к линейному виду простой заменой переменных, а дальнейшая оценка параметров производится с помощью метода наименьших квадратов. Рассмотрим некоторые функции.

Парабола второй степени $\hat{y}_x = a + b \cdot x + c \cdot x^2$ приводится к линейному виду с помощью замены: $x = x_1$, $x^2 = x_2$. В результате приходим к двухфакторному уравнению $\hat{y}_x = a + b \cdot x_1 + c \cdot x_2$, оценка параметров которого при помощи МНК, как будет показано в параграфе 2.2 приводит к системе следующих нормальных уравнений:

$$\begin{cases} a \cdot n + b \cdot \sum x_1 + c \cdot \sum x_2 = \sum y; \\ a \cdot \sum x_1 + b \cdot \sum x_1^2 + c \cdot \sum x_1 \cdot x_2 = \sum x_1 \cdot y; \\ a \cdot \sum x_2 + b \cdot \sum x_1 \cdot x_2 + c \cdot \sum x_2^2 = \sum x_2 \cdot y. \end{cases}$$

А после обратной замены переменных получим

$$\begin{cases} a \cdot n + b \cdot \sum x + c \cdot \sum x^2 = \sum y; \\ a \cdot \sum x + b \cdot \sum x^2 + c \cdot \sum x^3 = \sum x \cdot y; \\ a \cdot \sum x^2 + b \cdot \sum x^3 + c \cdot \sum x^4 = \sum x^2 \cdot y. \end{cases} \quad (2.17)$$

Парабола второй степени обычно применяется в случаях, когда для определенного интервала значений фактора меняется характер связи рассматриваемых признаков: прямая связь меняется на обратную или обратная на прямую.

Равносторонняя гипербола $\hat{y}_x = a + b/x$ может быть использована для характеристики связи удельных расходов сырья, материалов, топлива от объема выпускаемой продукции, времени обращения товаров от величины товарооборота, процента прироста заработной платы от уровня безработицы (например, кривая А.В. Филлипса), расходов на непродовольственные товары от доходов или общей суммы расходов (например, кривые Э. Энгеля) и в других случаях. Гипербола приводится к линейному уравнению простой заменой: $z = 1/x$. Система линейных уравнений при применении МНК будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} a \cdot n + b \cdot \sum \frac{1}{x} = \sum y; \\ a \cdot \sum \frac{1}{x} + b \cdot \sum \frac{1}{x^2} = \sum \frac{1}{x} \cdot y. \end{cases} \quad (2.18)$$

Аналогичным образом приводятся к линейному виду зависимости $\hat{y}_x = a + b \cdot \ln x$, $\hat{y}_x = a + b \cdot \sqrt{x}$ и другие.

Несколько иначе обстоит дело с регрессиями нелинейными по оцениваемым параметрам, которые делятся на два типа: нелинейные модели внутренне линейные (приводятся к линейному виду с помощью соответствующих преобразований, например, логарифмированием) и нелинейные модели внутренне нелинейные (к линейному виду не приводятся).

К внутренне линейным моделям относятся, например, степенная функция — $\hat{y}_x = a \cdot x^b$, показательная — $\hat{y}_x = a \cdot b^x$, экспоненциальная — $\hat{y}_x = \mathrm{e}^{a+b\cdot x}$, логистическая — $\hat{y}_x = \dfrac{a}{1 + b \cdot \mathrm{e}^{-c\cdot x}}$, обратная — $\hat{y}_x = \dfrac{1}{a + b \cdot x}$.

К внутренне нелинейным моделям можно, например, отнести следующие модели: $\hat{y}_x = a + b \cdot x^c$, $\hat{y}_x = a \cdot \left(1 - \dfrac{1}{1 - x^b}\right)$.

Среди нелинейных моделей наиболее часто используется степенная функция $y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$, которая приводится к линейному виду логарифмированием:

$$\ln y = \ln (a \cdot x^b \cdot \varepsilon);$$

$$\ln y = \ln a + b \cdot \ln x + \ln \varepsilon;$$

$$Y = A + b \cdot X + \mathrm{E},$$

где $Y = \ln y$, $X = \ln x$, $A = \ln a$, $\mathrm{E} = \ln \varepsilon$. Т. е. МНК мы применяем для преобразованных данных:

$$\begin{cases} A \cdot n + b \cdot \sum X = \sum Y, \\ A \cdot \sum X + b \cdot \sum X^2 = \sum (X \cdot Y), \end{cases}$$

а затем потенцированием находим искомое уравнение.

Широкое использование степенной функции связано с тем, что параметр b в ней имеет четкое экономическое истолкование — он является коэффициентом эластичности. (Коэффициент эластичности показывает, на сколько процентов измениться в среднем результат, если фактор изменится на 1 %.) Формула для расчета коэффициента эластичности имеет вид:

$$Э = f'(x) \cdot \frac{x}{y}. \qquad (2.19)$$

Так как для остальных функций коэффициент эластичности не является постоянной величиной, а зависит от соответствующего значения фактора x, то обычно рассчитывается средний коэффициент эластичности:

$$\bar{Э} = f'(\bar{x}) \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{y}}. \qquad (2.20)$$

Приведем формулы для расчета средних коэффициентов эластичности для наиболее часто используемых типов уравнений регрессии (табл. 2.4).

Таблица 2.4—Формулы для расчета средних коэффициентов эластичности

Вид функции, y	Первая производная, y'	Средний коэффициент эластичности, $\bar{Э}$
$y = a + b \cdot x + \varepsilon$	b	$\frac{b \cdot \bar{x}}{a + b \cdot \bar{x}}$
$y = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + \varepsilon$	$b + 2c \cdot x$	$\frac{(b + 2c \cdot \bar{x}) \cdot \bar{x}}{a + b \cdot \bar{x} + c \cdot \bar{x}^2}$
$y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$	$-\frac{b}{x^2}$	$-\frac{b}{a \cdot \bar{x} + b}$
$y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$	$a \cdot b \cdot x^{b-1}$	b
$y = a \cdot b^x \cdot \varepsilon$	$a \cdot \ln b \cdot b^x$	$\bar{x} \cdot \ln b$
$y = a + b \cdot \ln x + \varepsilon$	$\frac{b}{x}$	$\frac{b}{a + b \cdot \ln \bar{x}}$
$y = \frac{a}{1 + b \cdot \mathrm{e}^{-c \cdot x + \varepsilon}}$	$\frac{a \cdot b \cdot c \cdot \mathrm{e}^{-c \cdot x}}{(1 + b \cdot \mathrm{e}^{-c \cdot x})^2}$	$\frac{b \cdot c \cdot \bar{x}}{b + \mathrm{e}^{c \cdot \bar{x}}}$
$y = \frac{1}{a + b \cdot x + \varepsilon}$	$-\frac{b}{(a + b \cdot x)^2}$	$-\frac{b \cdot \bar{x}}{a + b \cdot \bar{x}}$

Возможны случаи, когда расчет коэффициента эластичности не имеет смысла. Это происходит тогда, когда для рассматриваемых признаков бессмысленно определение изменения в процентах.

Уравнение нелинейной регрессии, так же, как и в случае линейной зависимости, дополняется показателем тесноты связи. В данном случае это индекс корреляции:

$$\rho_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{\text{ост}}}{\sigma^2_y}}, \qquad (2.21)$$

где $\sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum\left(y-\bar{y}\right)^2$ — общая дисперсия результативного признака y, $\sigma_{\text{ост}}^2 = \frac{1}{n}\sum\left(y-\hat{y}_x\right)^2$ — остаточная дисперсия.

Величина данного показателя находится в пределах: $0 \le \rho_{xy} \le 1$. Чем ближе значение индекса корреляции к единице, тем теснее связь рассматриваемых признаков, тем более надежно уравнение регрессии.

Квадрат индекса корреляции носит название индекса детерминации и характеризует долю дисперсии результативного признака y, объясняемую регрессией, в общей дисперсии результативного признака:

$$\rho_{xy}^2 = 1 - \frac{\sigma_{\text{ост}}^2}{\sigma_y^2} = \frac{\sigma_{\text{объясн}}^2}{\sigma_y^2}, \tag{2.22}$$

т. е. имеет тот же смысл, что и в линейной регрессии; $\sigma_{\text{объясн}}^2 = \frac{1}{n}\sum\left(\hat{y}_x - \bar{y}\right)^2$.

Индекс детерминации ρ_{xy}^2 можно сравнивать с коэффициентом детерминации r_{xy}^2 для обоснования возможности применения линейной функции. Чем больше кривизна линии регрессии, тем величина r_{xy}^2 меньше ρ_{xy}^2. А близость этих показателей указывает на то, что нет необходимости усложнять форму уравнения регрессии и можно использовать линейную функцию.

Индекс детерминации используется для проверки существенности в целом уравнения регрессии по F-критерию Фишера:

$$F = \frac{\rho_{xy}^2}{1-\rho_{xy}^2} \cdot \frac{n-m-1}{m}, \tag{2.23}$$

где ρ_{xy}^2 — индекс детерминации, n — число наблюдений, m — число параметров при переменной x. Фактическое значение F-критерия (2.23) сравнивается с табличным при уровне значимости a и числе степеней свободы $k_2 = n - m - 1$ (для остаточной суммы квадратов) и $k_1 = m$ (для факторной суммы квадратов).

О качестве нелинейного уравнения регрессии можно также судить и по средней ошибке аппроксимации, которая, так же как и в линейном случае, вычисляется по формуле (1.8).

3. МНОЖЕСТВЕННАЯ РЕГРЕССИЯ И КОРРЕЛЯЦИЯ

Парная регрессия может дать хороший результат при моделировании, если влиянием других факторов, воздействующих на объект исследования, можно пренебречь. Если же этим влиянием пренебречь нельзя, то в этом случае следует попытаться выявить влияние других факторов, введя их в модель, т. е. построить уравнение множественной регрессии

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

где y — зависимая переменная (результативный признак), x_i — независимые, или объясняющие, переменные (признаки-факторы).

Множественная регрессия широко используется в решении проблем спроса, доходности акций, при изучении функции издержек производства, в макроэкономических расчетах и целом ряде других вопросов эконометрики. В настоящее время множественная регрессия – один из наиболее распространенных методов в эконометрике. Основная цель множественной регрессии – построить модель с большим числом факторов, определив при этом влияние каждого из них в отдельности, а также совокупное их воздействие на моделируемый показатель.

3.1. Спецификация модели. Отбор факторов при построении уравнения множественной регрессии

Построение уравнения множественной регрессии начинается с решения вопроса о спецификации модели. Он включает в себя два круга вопросов: отбор факторов и выбор вида уравнения регрессии.

Включение в уравнение множественной регрессии того или иного набора факторов связано прежде всего с представлением исследователя о природе взаимосвязи моделируемого показателя с другими экономическими явлениями. Факторы, включаемые во множественную регрессию, должны отвечать следующим требованиям.

Они должны быть количественно измеримы. Если необходимо включить в модель качественный фактор, не имеющий количественного измерения, то ему нужно придать количественную определенность.

Факторы не должны быть интеркоррелированы (корреляция между объясняющими переменными) и тем более находиться в точной функциональной связи.

Включение в модель факторов с высокой интеркорреляцией, может привести к нежелательным последствиям — система нормальных уравнений может оказаться плохо обусловленной и повлечь за собой неустойчивость и ненадежность оценок коэффициентов регрессии.

Если между факторами существует высокая корреляция, то нельзя определить их изолированное влияние на результативный показатель и параметры уравнения регрессии оказываются неинтерпретируемыми.

Включаемые во множественную регрессию факторы должны объяснить вариацию независимой переменной. Если строится модель с набором m факторов, то для нее рассчитывается показатель детерминации R^2, который фиксирует долю объясненной вариации результативного признака за счет рассматриваемых в регрессии m факторов. Влияние других, не учтенных в модели факторов, оценивается как $1 - R^2$ с соответствующей остаточной дисперсией S^2.

При дополнительном включении в регрессию $m + 1$ фактора коэффициент детерминации должен возрастать, а остаточная дисперсия уменьшаться:

$$R_{m+1}^2 \geq R_m^2 \text{ и } S_{m+1}^2 \leq S_m^2 .$$

Если же этого не происходит и данные показатели практически не отличаются друг от друга, то включаемый в анализ фактор x_{m+1} не улучшает модель и практически является лишним фактором.

Насыщение модели лишними факторами не только не снижает величину остаточной дисперсии и не увеличивает показатель детерминации, но и приводит к статистической незначимости параметров регрессии по критерию Стьюдента.

Таким образом, хотя теоретически регрессионная модель позволяет учесть любое число факторов, практически в этом нет необходимости. Отбор факторов производится на основе качественного теоретико-экономического анализа. Однако теоретический анализ часто не позволяет однозначно ответить на вопрос о количественной взаимосвязи рассматриваемых признаков и целесообразности включения фактора в модель. Поэтому отбор факторов обычно осуществляется в две стадии: на первой подбираются факторы исходя из сущности проблемы; на второй — на основе матрицы показателей корреляции определяют статистики для параметров регрессии.

Коэффициенты интеркорреляции (т. е. корреляции между объясняющими переменными) позволяют исключать из модели дублирующие факторы. Считается, что две переменные явно коллинеарны, т. е. находятся между собой в линейной зависимости, если $r_{x_i x_j} \geq 0,7$. Если факторы явно коллинеарны, то они дублируют друг друга и один из них рекомендуется исключить из регрессии. Предпочтение при этом отдается не фактору, более тесно связанному с результатом, а тому фактору, который при достаточно тесной связи с результатом имеет наименьшую тесноту связи с другими факторами. В этом требовании проявляется специфика множественной регрессии как метода исследования комплексного воздействия факторов в условиях их независимости друг от друга.

Пусть, например, при изучении зависимости $y = f(x_1, x_2, x_3)$матрица парных коэффициентов корреляции оказалась следующей (табл. 3.1):

Таблица 3.1 — Матрица парных коэффициентов корреляции

	y	x_1	x_2	x_3
y	1	0,8	0,7	0,6
x_1	0,8	1	0,8	0,5
x_2	0,7	0,8	1	0,2
x_3	0,6	0,5	0,2	1

Очевидно, что факторы x_1 и x_2 дублируют друг друга. В анализ целесообразно включить фактор x_2 а не x_1, хотя корреляция x_2 с результатом y слабее, чем корреляция фактора x_1 с y $r_{yx_2} = 0,7 < r_{yx_1} = 0,8$, но зато значительно слабее межфакторная корреляция $r_{x_2x_3} = 0,2 < r_{x_1x_3} = 0,5$. Поэтому в данном случае в уравнение множественной регрессии включаются факторы x_2, x_3.

По величине парных коэффициентов корреляции обнаруживается лишь явная коллинеарность факторов. Наибольшие трудности в использовании аппарата множественной регрессии возникают при наличии мультиколлинеарности факторов, когда более чем два фактора связаны между собой линейной зависимостью, т. е. имеет место совокупное воздействие факторов друг на друга. Наличие мультиколлинеарности факторов может означать, что некоторые факторы будут всегда действовать в унисон. В результате вариация в исходных данных перестает быть полностью независимой и нельзя оценить воздействие каждого фактора в отдельности.

Включение в модель мультиколлинеарных факторов нежелательно в силу следующих последствий:

Затрудняется интерпретация параметров множественной регрессии как характеристик действия факторов в «чистом» виде, ибо факторы коррелированы; параметры линейной регрессии теряют экономический смысл.

Оценки параметров ненадежны, обнаруживают большие стандартные ошибки и меняются с изменением объема наблюдений (не только по величине, но и по знаку), что делает модель непригодной для анализа и прогнозирования.

Для оценки мультиколлинеарности факторов может использоваться определитель матрицы парных коэффициентов корреляции между факторами.

Если бы факторы не коррелировали между собой, то матрица парных коэффициентов корреляции между факторами была бы единичной матрицей, поскольку все недиагональные элементы $r_{x_i x_j}$ $i \neq j$ были бы равны нулю. Так, для уравнения, включающего три объясняющих переменных

$$\hat{y} = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$$

матрица коэффициентов корреляции между факторами имела бы определитель, равный единице:

$$\operatorname{Det} \mathbf{R} = \begin{vmatrix} r_{x_1 x_1} & r_{x_1 x_2} & r_{x_1 x_3} \\ r_{x_2 x_1} & r_{x_2 x_2} & r_{x_2 x_3} \\ r_{x_3 x_1} & r_{x_3 x_2} & r_{x_3 x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot$$

Если же, наоборот, между факторами существует полная линейная зависимость и все коэффициенты корреляции равны единице, то определитель такой матрицы равен нулю:

$$\operatorname{Det} \mathbf{R} = \begin{vmatrix} r_{x_1 x_1} & r_{x_1 x_2} & r_{x_1 x_3} \\ r_{x_2 x_1} & r_{x_2 x_2} & r_{x_2 x_3} \\ r_{x_3 x_1} & r_{x_3 x_2} & r_{x_3 x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot$$

Чем ближе к нулю определитель матрицы межфакторной корреляции, тем сильнее мультиколлинеарность факторов и ненадежнее результаты множественной регрессии. И, наоборот, чем ближе к единице определитель матрицы межфакторной корреляции, тем меньше мультиколлинеарность факторов.

Существует ряд подходов преодоления сильной межфакторной корреляции. Самый простой путь устранения мультиколлинеарности состоит в исключении из модели одного или нескольких факторов. Другой подход связан с преобразованием факторов, при котором уменьшается корреляция между ними.

Одним из путей учета внутренней корреляции факторов является переход к совмещенным уравнениям регрессии, т. е. к уравнениям, которые отражают не только влияние факторов, но и их взаимодействие. Так, если $y = f\ (x_1, x_2, x_3)$, то возможно построение следующего совмещенного уравнения:

$$y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + \varepsilon .$$

Рассматриваемое уравнение включает взаимодействие первого порядка (взаимодействие двух факторов). Возможно включение в модель и взаимодействий более высокого порядка, если будет доказана их статистическая значимость по F-критерию Фишера, но, как правило, взаимодействия третьего и более высоких порядков оказываются статистически незначимыми.

Отбор факторов, включаемых в регрессию, является одним из важнейших этапов практического использования методов регрессии. Подходы к отбору факторов на основе показателей корреляции могут быть разные. Они приводят построение уравнения множественной регрессии соответственно к разным методикам. В зависимости от того, какая методика построения уравнения регрессии принята, меняется алгоритм ее решения на ЭВМ.

Наиболее широкое применение получили следующие методы построения уравнения множественной регрессии:

1. метод исключения — отсев факторов из полного его набора.
2. метод включения — дополнительное введение фактора.
3. шаговый регрессионный анализ — исключение ранее введенного фактора.

При отборе факторов также рекомендуется пользоваться следующим правилом: число включаемых факторов обычно в 6–7 раз меньше объема совокупности, по которой строится регрессия. Если это соотношение нарушено, то число степеней свободы остаточной дисперсии очень мало. Это приводит к тому, что параметры уравнения регрессии оказываются статистически незначимыми, а F-критерий меньше табличного значения.

4. ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

4.1. Понятие производственной функции одной переменной

Каждый знает, что производство благ и услуг на пустом месте невозможно. Для того, чтобы произвести мебель, продукты питания, одежду и другие товары, необходимо иметь соответствующие исходные материалы, оборудование, помещение, клочок земли, специалистов, которые организуют производство. Все, необходимое для организации процесса производства называют факторами производства. Традиционно к факторам производства относят капитал, труд, землю и предпринимательство.

Для организации производственного процесса необходимые факторы производства должны присутствовать в определенном количестве. Зависимость максимального объема производимого продукта от затрат используемых факторов называется *производственной функцией*.

Рассмотрение понятия «производственная функция» начнем с наиболее простого случая, когда производство обусловлено только одним фактором. В этом случае *производственная функция* — это функция, независимая переменная которой принимает значения используемого ресурса (фактора производства), а зависимая переменная — значения объемов выпускаемой продукции:

$$y = f(x). \tag{4.1}$$

В этой формуле y есть функция одной переменной x. В связи с этим производственная функция (ПФ) называется одноресурсной или однофакторной. Ее область определения — множество неотрицательных действительных чисел. Символ f является характеристикой производственной системы, преобразующей ресурс в выпуск. В микроэкономической теории принято считать, что y — максимально возможный объем выпуска продукции, если ресурс затрачивается или используется в количестве x единиц. В макроэкономике такое понимание не совсем корректно: возможно при другом распределении ресурсов между структурными единицами экономики выпуск мог бы быть и большим. В этом случае ПФ — статистически устойчивая связь между затратами ресурса и выпуском. Более правильной является символика

$$y = f(x, a),$$

где a — вектор параметров ПФ.

Пример 1. Возьмем ПФ f в виде $f(x) = ax^b$, где x — величина затрачиваемого ресурса (например, рабочего времени), $f(x)$ — объем выпускаемой продукции (например, число готовых к отправке холодильников). Величины a и b — параметры ПФ f. Здесь a и b — положительные числа и число $b \leq 1$, вектор параметров есть двумерный вектор (a, b). ПФ $y = ax^b$ является типичным представителем широкого класса однофакторных ПФ.

График ПФ изображен на рисунке 4.1.

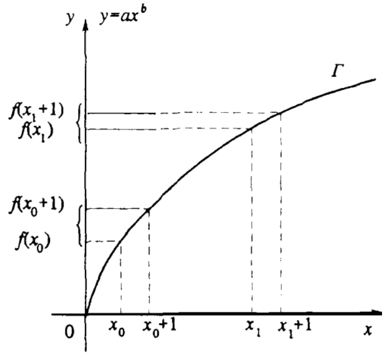


Рисунок 4.1 — График функции $y = ax^b$

На графике видно, что с ростом величины затрачиваемого ресурса у растет, однако при этом каждая дополнительная единица ресурса дает все меньший прирост объема у выпускаемой продукции. Отмеченное обстоятельство (рост объема y и уменьшение прироста объема у с ростом величины x) отражает фундаментальное положение экономической теории (хорошо подтверждаемое практикой), называемое законом убывающей эффективности (убывающей производительности или убывающей отдачи).

В качестве простого примера возьмем однофакторную производственную функцию, характеризующую производство фермером какого-либо сельскохозяйственного продукта. Пусть все факторы производства, такие как величина земельных угодий, наличие у фермера сельскохозяйственной техники, посевного материала, количество труда, вложенного в производство продукта, остаются из года в год постоянными величинами. Меняется только один фактор — количество применяемых удобрений. В зависимости от этого изменяется величина получаемого продукта. В начале, с ростом переменного фактора, она увеличивается достаточно быстро, затем рост общего продукта замедляется, а начиная с определенных объемов применяемых удобрений, величина получаемого продукта начинает убывать. Дальнейшее увеличение переменного фактора не дает увеличения продукта.

ПФ могут иметь разные области использования. Принцип «затраты – выпуск» может быть реализован как на микро-, так и на макроэкономическом уровне. Сначала остановимся на микроэкономическом уровне. ПФ $y = ax^b$, рассмотренная выше, может быть использована для описания взаимосвязи между величиной затрачиваемого или используемого ресурса x в течение года на отдельном предприятии (фирме) и годовым выпуском продукции у этого предприятия (фирмы). В роли производственной системы здесь выступает отдельное предприятие (фирма) — имеем микроэкономическую ПФ (МИПФ). На микроэкономическом уровне в роли производственной системы может выступать также отрасль, межотраслевой производственный комплекс. МИПФ строятся и используются в основном для решения задач анализа и планирования, а также задач прогнозирования.

ПФ может быть использована для описания взаимосвязи между годовыми затратами труда в масштабе региона или страны в целом и годовым конечным выпуском продукции (или доходом) этого региона или страны в целом. Здесь в роли производственной системы выступает регион или страна в целом — имеем макроэкономический уровень и макроэкономическую ПФ (МАПФ). МАПФ строятся и активно используются для решения всех трех типов задач (анализа, планирования и прогнозирования).

Точное толкование понятий затрачиваемого или используемого ресурса и выпускаемой продукции, а также выбор единиц их измерения зависят от характера и масштаба производственной системы, особенностей решаемых задач, наличия исходных данных. На микроэкономическом уровне затраты и выпуск могут измеряться как в натуральных, так и в стоимостных единицах (показателях). Годовые затраты труда могут быть измерены в человеко-часах или в рублях выплаченной заработной платы; выпуск продукции может быть представлен в штуках или в других натуральных единицах или в виде своей стоимости.

На макроэкономическом уровне затраты и выпуск измеряются, как правило, в стоимостных показателях и представляют собой стоимостные агрегаты, то есть суммарные величины произведений объемов затрачиваемых ресурсов и выпускаемых продуктов на их цены.

4.2. Производственные функции нескольких переменных

Перейдем теперь к рассмотрению производственных функций нескольких переменных.

Производственная функция нескольких переменных — это функция, независимые переменные которой принимают значения объемов затрачиваемых или используемых ресурсов (число переменных n равно числу ресурсов), а значение функции имеет смысл величин объемов выпуска:

$$y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n). \tag{4.2}$$

В формуле (4.2) y ($y \geq 0$) — скалярная, а x — векторная величина, x_1, …, x_n — координаты вектора, то есть $f(x_1, \ldots, x_n)$ есть числовая функция нескольких переменных $x_1, \ldots, x_n$. В связи с этим ПФ $f(x_1, \ldots, x_n)$ называют многоресурсной или многофакторной. Более правильной является такая символика $f(x_1, \ldots, x_n, a)$, где a — вектор параметров ПФ.

По экономическому смыслу все переменные этой функции неотрицательны, следовательно, областью определения многофакторной ПФ является множество n-мерных векторов x, все координаты $x_1, \ldots, x_n$ которых неотрицательные числа.

Для отдельного предприятия (фирмы), выпускающего однородный продукт, ПФ $f(x_1, \ldots, x_n)$ может связывать объем выпуска с затратами рабочего времени по различным видам трудовой деятельности, различных видов сырья, комплектующих изделий, энергии, основного капитала. ПФ такого типа характеризуют действующую технологию предприятия (фирмы).

При построении ПФ для региона или страны в целом в качестве величины годового выпуска Y чаще берут совокупный продукт (доход) региона или страны, исчисляемый обычно в неизменных, а не в текущих ценах, в качестве ресурсов рассматривают основной капитал (x_1 (=K) — объем используемого в течение года основного капитала) и живой труд (x_2 (=L) — количество единиц затрачиваемого в течение года живого труда), исчисляемые обычно в стоимостном выражении. Таким образом, строят двухфакторную ПФ $Y = f(K, L)$. От двухфакторных ПФ переходят к трехфакторным. Кроме того, если ПФ строится по данным временных рядов, то в качестве особого фактора роста производства может быть включен технический прогресс.

ПФ $y = f(x_1, x_2)$ называется *статической*, если ее параметры и ее характеристика f не зависят от времени t, хотя объемы ресурсов и объем выпуска могут зависеть от времени t, то есть могут иметь представление в виде временных рядов:$x_1(0)$, $x_1(1)$, …, $x_1(T)$; $x_2(0)$, $x_2(1)$, …, $x_2(T)$; $y(0)$, $y(1)$, …, $y(T)$; $y(t) = f(x_1(t), x_2(t))$. Здесь t — номер года, $t = 0,1,\ldots,T$; $t = 0$ — базовый год временного промежутка, охватывающего годы 1, 2, …, T.

Пример 2. Для моделирования отдельного региона или страны в целом (то есть для решения задач на макроэкономическом, а также на микроэкономическом уровне) часто используется ПФ вида $y = a_o x_1^{a_1} x_2^{a_2}$, где a_0, a_1, a_2 — параметры ПФ. Это положительные постоянные (часто a_1 и a_2 таковы, что $a_1 + a_2 = 1$). ПФ только что приведенного вида называется ПФ Кобба-Дугласа (ПФКД) по имени двух американских экономистов, предложивших ее использовать в 1929 году.

ПФКД активно применяется для решения разнообразных теоретических и прикладных задач благодаря своей структурной простоте. ПФКД принадлежит к классу, так называемых, мультипликативных ПФ (МПФ). В приложениях ПФКД $x_1 = K$ равно объему используемого основного капитала (объему используемых основных фондов — в отечественной терминологии), $x_2 = L$ затратам живого труда, тогда ПФКД приобретает вид, часто используемый в литературе:

$$Y = a_o K^{\alpha_1} L^{\alpha_2} .$$

Пример 3. Линейная ПФ (ЛПФ) имеет вид: $y = a_o + a_1 x_1 + a_2 x_2$ (двухфакторная) и $y = a_o + a_1 x_1 + ... + a_n x_n$ (многофакторная). ЛПФ принадлежит к классу так называемых аддитивных ПФ (АПФ). Переход от мультипликативной ПФ к аддитивной осуществляется с помощью операции логарифмирования. Для двухфакторной мультипликативной ПФ

$$y = a_o x_1^{a_1} x_2^{a_2}$$

этот переход имеет вид: $\ln y = \ln a_o + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2$. Вводя соответствующую замену, получим аддитивную ПФ $w = \ln a_o + a_1 v_1 + a_2 v_2$.

Если сумма показателей степени в ПФ Кобба-Дугласа равна единице, то ее можно записать в несколько другой форме:

$$\frac{Y}{L} = \frac{a_o K^{a_1} L^{a_2}}{L} = \frac{a_o K^{a_1}}{L^{1-a_2}} = \frac{a_o K^{a_1}}{L^{a_1}} = a_o \left(\frac{K}{L} \right)^{a_1}, \text{ т. е. } \frac{Y}{L} = a_o \left(\frac{K}{L} \right)^{a_1} .$$

Дроби $\frac{Y}{L} = z$ и $\frac{K}{L} = k$ называются соответственно производительностью труда и капиталовооруженностью труда. Используя новые символы, получаем

$$z = a_o k^{a_1} ,$$

т. е. из двухфакторной ПФКД получим формально однофакторную ПФКД. В связи с тем, что $0 < a_1 < 1$, из последней формулы следует, что производительность труда z растет медленнее его капиталовооруженности. Однако этот вывод справедлив для случая статической ПФКД в рамках существующих технологии и ресурсов.

Отметим, что дробь $\frac{Y}{K}$ называется производительностью капитала или капиталоотдачей, обратные дроби $\frac{K}{Y}$ и $\frac{L}{K}$ называются соответственно капиталоемкостью и трудоемкостью выпуска.

ПФ называется *динамической*, если:

— время t фигурирует в качестве самостоятельной переменной величины (как бы самостоятельного фактора производства), влияющего на объем выпускаемой продукции;

— параметры ПФ и ее характеристика f зависят от времени t.

Отметим, что если параметры ПФ оценивались по данным временных рядов (объемов ресурсов и выпуска) продолжительностью $T_о$ лет, то экстраполяционные расчеты по такой ПФ следует проводить не более чем на $1/3T_о$ лет вперед.

При построении ПФ научно-технический прогресс (НТП) может быть учтен с помощью введения множителя НТП e^{pt}, где параметр p ($p > 0$) характеризует темп прироста выпуска под влиянием НТП:

$$y\,(t) = e^{pt} f\ (x_1\ (t), x_2\ (t))\,(t = 0, 1, \dots, T).$$

Эта ПФ — простейший пример динамической ПФ; она включает нейтральный, то есть нематериализованный в одном из факторов технический прогресс. В более сложных случаях технический прогресс может воздействовать непосредственно на производительность труда или капиталоотдачу:

$$Y\,(t) = f\,(A\,(t)\cdot L\,(t), K\,(t)) \text{ или } Y\,(t) = f\,(A\,(t)\cdot K\,(t), L\,(t)).$$

Он называется, соответственно, трудосберегающим или капиталосберегающим НТП.

Пример 4. Приведем вариант ПФКД с учетом НТП

$$y\,(t) = a_o e^{pt} x_1(t)^{a_1} x_2(t)^{a_2}.$$

Расчет численных значений параметров такой функции проводится с помощью корреляционного и регрессионного анализа.

Выбор аналитической формы ПФ $y = f\ (x_1,\ x_2)$диктуется, прежде всего, теоретическими соображениями, которые должны учитывать особенности взаимосвязей между конкретными ресурсами или экономических закономерностей. Оценка параметров ПФ обычно проводится методом наименьших квадратов.

4.3. Свойства и основные характеристики производственных функций

Для производства конкретного продукта требуется сочетание разнообразных факторов. Несмотря на это, различные производственные функции обладают рядом общих свойств.

Для определенности ограничимся производственными функциями двух переменных $f(x_1, x_2)$. Прежде всего необходимо отметить, что такая производственная функция определена в неотрицательном ортанте двумерной плоскости, то есть при $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$. ПФ $f(x_1, x_2)$ удовлетворяет следующему ряду свойств:

— без ресурсов нет выпуска, т. е. $f(0, 0) = 0$;

— при отсутствии хотя бы одного из ресурсов нет выпуска, т. е. $f(0, x_2) =$ $f(x_1, 0)$;

— с ростом затрат хотя бы одного ресурса объем выпуска растет;

— с ростом затрат одного ресурса при неизменном количестве другого ресурса объем выпуска растет, т. е. если $x > 0$, то $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} > 0$ $(\mathrm{i} = 1{,}2)$, $\mathrm{x} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$;

— с ростом затрат одного ресурса при неизменном количестве другого ресурса величина прироста выпуска на каждую дополнительную единицу *i*-го ресурса не растет (закон убывающей эффективности), т. е. если $x > 0$, то $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} \leq 0$;

— при росте одного ресурса предельная эффективность другого ресурса возрастает, т. е. если $x > 0$, то $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \geq 0$, $\mathrm{x} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$;

ПФ является однородной функцией, т. е. $f(tx_1, tx_2) = t^p f(x_1, x_2)$; при $p > 1$ имеем рост эффективности производства от роста масштаба производства; при $p < 1$ имеем падение эффективности производства от роста масштаба производства; при $p = 1$ имеем постоянную эффективность производства при росте его масштаба.

Подобно линии уровня целевой функции оптимизационной задачи, для ПФ также имеет место аналогичное понятие. *Линия уровня ПФ* — это множество точек, на котором ПФ принимает постоянное значение. Иногда линии уровня называют *изоквантами* ПФ. Возрастание одного фактора и уменьшение другого могут происходить таким образом, что общий объем производства остается на прежнем уровне. Изокванты как раз и определяют все возможные комбинации факторов производства, необходимых для достижения заданного уровня продукции (рис. 4.2.).

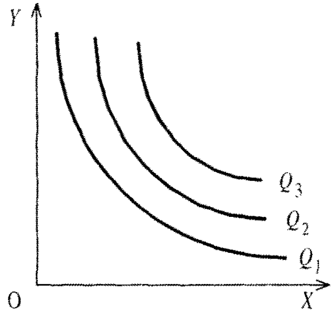


Рисунок 4.2 — Линия уровня ПФ-изокванты

Из рисунка 4.2 видно, что вдоль изокванты выпуск продукции постоянный, то есть прирост выпуска отсутствует. Математически это означает, что полный дифференциал ПФ на изокванте равен нулю:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 = 0 .$$

Изокванты обладают следующими *свойствами*:

Изокванты не пересекаются.

Большей удаленности изокванты от начала координат соответствует больший уровень выпускаемой продукции.

Изокванты — понижающиеся кривые, имеют отрицательный наклон.

Изокванты являются подобием кривых безразличия с той лишь разницей, что они отражают ситуацию не в сфере потребления, а в сфере производства.

Отрицательный наклон изоквант объясняется тем, что увеличение использования одного фактора при определенном объеме выпуска продукта всегда будет сопровождаться уменьшением количества другого фактора. Крутизна наклона изокванты характеризуется *предельной нормой технологического замещения факторов производства (MRTS)*. Рассмотрим эту величину на примере двухфакторной производственной функции Q (y, x). Предельная норма технологического замещения измеряется соотношением изменения фактора y к изменению фактора x. Поскольку замена факторов происходит в обратном отношении, то математическое выражение показателя MRTS берется со знаком минус:

$$MRTS_{x,y} = -\frac{\Delta y}{\Delta x} .$$

На рисунке 4.3 изображена *одна из из*оквант ПФ Q (y, x).

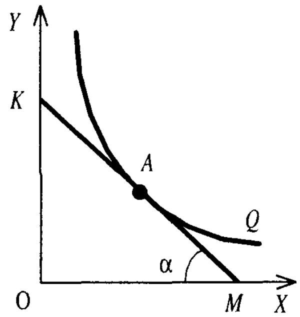


Рисунок 4.3 — Одна из изоквант двухфакторной производственной функции

Если взять какую-либо точку на этой изокванте, например, точку А и провести к ней касательную КМ, то тангенс угла даст нам значение MRTS:

$$MRTS_{x,y} = \text{tg}\alpha$$

Можно отметить, что в верхней части изокванты угол будет достаточно велик, что говорит о том, что для изменения фактора *x* на единицу требуются значительные изменения фактора y. Следовательно, в этой части кривой значение MRTS будет велико. По мере движения вниз по изокванте значение предельной нормы технологического замещения будет постепенно убывать. Это означает, что для увеличения фактора *x* на единицу потребуется незначительное уменьшение фактора *y*. При полной заменяемости факторов изокванты из кривых преобразуются в прямые (рис. 4.4)

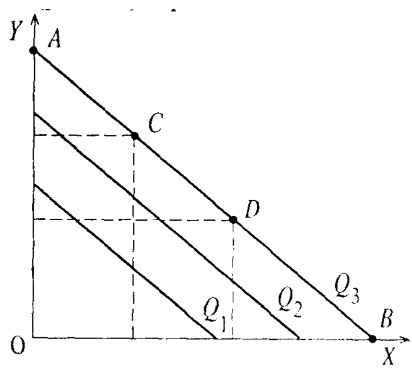


Рисунок 4.4 — Изокванты при полной заменяемости факторов

Один из наиболее интересных примеров использования изоквант ПФ — это исследование *эффекта масштаба производства.*

Что эффективнее для экономики: один крупный завод или несколько мелких предприятий? Ответ на этот вопрос не так прост. Плановая экономика отвечала на него однозначно, отдавая приоритет промышленным гигантам. С переходом к рыночной экономике началось повсеместное разукрупнение созданных ранее объединений. Где же золотая середина? Доказательный ответ на этот вопрос можно получить, исследовав эффект масштаба производства.

Представим, что на обувной фабрике руководство приняло решение значительную часть полученной прибыли направить на развитие производства с целью увеличения объемов производимой продукции. Допустим, что капитал (оборудование, станки, производственные площади) увеличен в два раза. Численность работников увеличилась в такой же пропорции. Возникает вопрос, что произойдет в таком случае с объемом выпускаемой продукции?

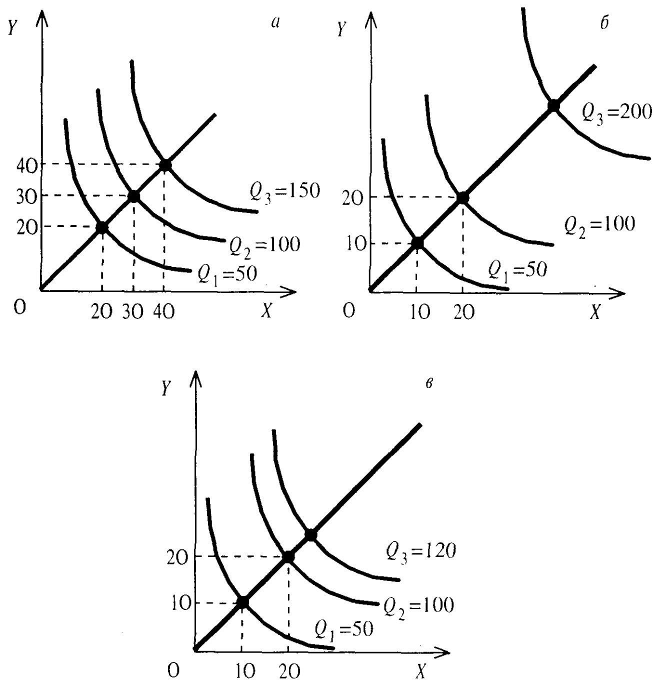


Рисунок 4.5 — Исследование эффекта масштаба производства

Из анализа рисунка 4.5 следуют три варианта ответа:

— количество продукции возрастет в два раза (постоянная отдача от масштаба);

— увеличится более, чем в два раза (возрастающая отдача от масштаба);

— увеличится, но меньше, чем в два раза (убывающая отдача от масштаба).

Постоянная отдача от масштаба производства объясняется однородностью переменных факторов. При пропорциональном увеличении капитала и труда на таком производстве средняя и предельная производительность этих факторов останется неизменной. В таком случае безразлично, будет ли работать одно крупное предприятие или вместо него будет создано два мелких.

При убывающей отдаче от масштаба невыгодно создавать крупное производство. Причиной низкой эффективности в таком случае, как правило, являются дополнительные затраты, связанные с управлением подобным производством, сложности координации крупного производства.

Возрастающая отдача от масштаба, как правило, характерна, для тех производств, где возможна широкая автоматизация производственных процессов, применение поточных и конвейерных линий. Но с тенденцией возрастающей отдачи от масштаба нужно быть очень осторожным. Рано или поздно она превращается в постоянную, а затем и в убывающую отдачу от масштаба.

Остановимся на некоторых характеристиках производственных функций, наиболее важных для экономического анализа. Рассмотрим их на примере ПФ вида $y = f(x_1, x_2, \alpha)$.

Как уже было отмечено выше, отношение $A_i = \dfrac{y}{x_i}$ (i =1,2) называется средней производительностью i-го ресурса или средним выпуском по i-му ресурсу. Первая частная производная ПФ $M_i = \dfrac{\partial y}{\partial x_i}$ (i = 1,2) называется предельной производительностью i-го ресурса или предельным выпуском по i-му ресурсу. Эту предельную величину иногда интерпретируют, используя близкое к ней отношение малых конечных величин $\dfrac{\Delta y}{\Delta x_i}$. Приближенно она показывает, на сколько единиц увеличится объем выпуска y, если объем затрат x_i i-го ресурса возрастет на одну (достаточно малую) единицу при неизменных объемах другого затрачиваемого ресурса.

Например, в ПФКД для средних производительностей основного капитала y/K и труда y/L используются соответственно термины капиталоотдача и производительность труда:

$$A_1 = \frac{y}{K} = a_o K^{a_1 - 1} L^{a_2}, \quad \mathrm{A}_2 = \frac{y}{L} = a_o K^{a_1} L^{a_2 - 1}.$$

Определим для этой функции предельные производительности факторов:

$$M_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = a_1 A_1, \quad \mathrm{M}_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = a_2 A_2$$

$$\text{и} \frac{M_1}{A_1} = a_1, \quad \frac{M_2}{A_2} = a_2.$$

Таким образом, если $a_i \le 1$, то $M_i \le A_i$ (i = 1,2), то есть предельная производительность i-го ресурса не больше средней производительности этого ресурса. Отношение предельной производительности M_i i-го фактора к его средней производительности A_i называется эластичностью выпуска по i-му фактору производства

$$E_i = \frac{M_i}{A_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{y}$$

или приближенно

$$E_i \approx \frac{\Delta_i y}{y} / \frac{\Delta x_i}{x_i}.$$

Таким образом, эластичность выпуска (объема производства) по некоторому фактору (коэффициент эластичности) приближенно определяется как отношение темпов прироста у к темпам прироста этого фактора, то есть E_1 показывает на сколько процентов увеличится выпуск у, если затраты i-го ресурса увеличатся на один процент при неизменных объемах другого ресурса.

Сумма $E_1 + E_2 = E$ называется эластичностью производства. Например, для ПФКД $E_1 = a_1$, $E_2 = a_2$ и $E = E_1 + E_2 = a_1 + a_2$.

4.4. Примеры использования производственных функций в задачах экономического анализа, прогнозирования и планирования

Производственные функции позволяют количественно проанализировать важнейшие экономические зависимости в сфере производства. Они дают возможность оценить среднюю и предельную эффективность различных ресурсов производства, эластичность выпуска по различным ресурсам, предельные нормы замещения ресурсов, эффект от масштаба производства и многое другое.

Пример 1. Предположим, что процесс производства описывается с помощью функции выпуска

$$Y = 0{,}5K^{1/3}L^{2/3}.$$

Оценим основные характеристики этой функции для способа производства, при котором $K = 400$, а $L = 200$.

Решение.

Предельные производительности факторов.

Для расчета этих величин определим частные производные функции по каждому из факторов:

$$M_K = 0{,}5 \cdot 1/3 \cdot 400^{-2/3} \cdot 200^{2/3} = 0{,}1;$$
$$M_L = 0{,}5 \cdot 2/3 \cdot 400^{1/3} \cdot 200^{-1/3} = 0{,}4.$$

Таким образом, предельная производительность фактора труд в четыре раза превышает аналогичную величину для фактора капитал.

Эластичность производства.

Эластичность производства определяется суммой эластичностей выпуска по каждому фактору, то есть

$$E = E_K + E_L = 1/3 + 2/3 = 1.$$

Предельная норма замещения ресурсов.

Выше в тексте эта величина обозначалась MRTS_{LK} и равнялась $-\Delta L/\Delta K$. Таким образом, в нашем примере

$$\mathrm{MRTS}_{LK} - 0{,}4/0{,}1 = -4,$$

т. е. для замещения единицы труда в этой точке необходимы четыре единицы ресурсов капитала.

Уравнение изокванты.

Для определения формы изокванты необходимо зафиксировать значение объема выпуска (Y). Пусть, например, $Y = 500$. Для удобства примем L функцией K, тогда уравнение изокванты примет вид

$$L = \left(\frac{500}{0.5K^{1/3}} \right)^{3/2}.$$

Предельная норма замещения ресурсов определяет тангенс угла наклона касательной к изокванте в соответствующей точке. Используя предыдущие результаты, можно сказать, что точка касания расположена в верхней части изокваны, так как угол достаточно велик.

Пример 2. Рассмотрим функцию Кобба-Дугласа в общем виде

$$Y = AK^{\alpha} L^{\beta} .$$

Предположим, что K и L удваиваются. Таким образом, новый уровень выпуска (Y) запишется следующим образом:

$$Y = A(2K)^{\alpha}(2L)^{\beta} = A2^{\alpha} K^{\alpha} 2^{\beta} L^{\beta} = 2^{\alpha+\beta} AK^{\alpha} L^{\beta} = 2^{\alpha+\beta} Y .$$

Определим эффект от масштаба производства в случаях, если $\alpha + \beta > 1$>1, $\alpha + \beta = 1$ и $\alpha + \beta < 1$.

Если, например, $\alpha + \beta$=1,2, а $2^{\alpha + \beta}$ = 2,3, то Y увеличивается больше, чем в два раза; если $\alpha + \beta$ = 1, а $2^{\alpha + \beta}$ = 2, то удвоение K и L приводит к удвоению Y; если $\alpha + \beta$ = 0,8, а $2^{\alpha + \beta}$ = 1,74, то Y увеличивается меньше, чем в два раза.

Таким образом, в примере 1 мог наблюдаться постоянный эффект от масштаба производства.

Основная задача производственных функций все же дать исходный материал для наиболее эффективных управленческих решений. Проиллюстрируем вопрос принятия оптимальных решений на основе использования производственных функций.

5. СИСТЕМЫ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

При использовании отдельных уравнений регрессии, например для экономических расчетов, в большинстве случаев предполагается, что аргументы (факторы) можно изменять независимо друг от друга. Однако это предположение является очень грубым: практически изменение одной переменной, как правило, не может происходить при абсолютной неизменности других. Ее изменение повлечет за собой изменения во всей системе взаимосвязанных признаков. Следовательно, отдельно взятое уравнение множественной регрессии не может характеризовать истинные влияния отдельных признаков на вариацию результирующей переменной. Именно поэтому в последние десятилетия в экономических исследованиях важное место заняла проблема описания структуры связей между переменными системой, так называемых одновременных уравнений, называемых также структурными уравнениями.

Система уравнений в эконометрических исследованиях может быть построена по-разному.

Возможна *система независимых уравнений,* когда каждая зависимая переменная y рассматривается как функция одного и того же набора факторов x:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + \varepsilon_1, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + \varepsilon_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + \varepsilon_m. \end{cases} \tag{5.1}$$

Набор факторов x_j в каждом уравнении может варьировать. Каждое уравнение системы независимых уравнений может рассматриваться самостоятельно. Для нахождения его параметров используется метод наименьших квадратов. По существу, каждое уравнение этой системы является уравнением регрессии. Так как фактические значения зависимой переменной отличаются от теоретических на величину случайной ошибки, то в каждом уравнении присутствует величина случайной ошибки ε_i.

Если зависимая переменная y одного уравнения выступает в виде фактора x в другом уравнении, то исследователь может строить модель в виде *системы рекурсивных уравнений:*

$$
\begin{cases}
y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + \varepsilon_1, \\
y_2 = b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + \varepsilon_2, \\
y_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + \varepsilon_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_m = b_{m1}y_1 + \ldots + b_{m,m-1}y_{m-1} + a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + \varepsilon_m.
\end{cases}
\tag{5.2}
$$

В данной системе зависимая переменная y включает в каждое последующее уравнение в качестве факторов все зависимые переменные предшествующих уравнений наряду с набором собственно факторов x. Каждое уравнение этой системы может рассматриваться самостоятельно, и его параметры определяются методом наименьших квадратов (МНК).

Наибольшее распространение в эконометрических исследованиях получила *система взаимозависимых уравнений*. В ней одни и те же зависимые переменные в одних уравнениях входят в левую часть, а в других уравнениях — в правую часть системы:

$$
\begin{cases}
y_1 = b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + \ldots + b_{1m}y_m \qquad + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + \varepsilon_1, \\
y_2 = b_{21}y_1 + b_{23}y_3 + \ldots + b_{2m}y_m \qquad + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + \varepsilon_2, \\
y_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + \ldots + b_{3m}y_m \qquad + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + \varepsilon_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_m = b_{m1}y_1 + b_{m2}y_2 + \ldots + b_{m,m-1}y_{m-1} + a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + \varepsilon_n.
\end{cases}
\tag{5.3}
$$

Система взаимозависимых уравнений получила название *системы совместных, одновременных уравнений*. Тем самым подчеркивается, что в системе одни и те же переменные одновременно рассматриваются как зависимые в одних уравнениях и как независимые в других. В эконометрике эта система уравнений называется также *структурной формой модели*. В отличие от предыдущих систем каждое уравнение системы одновременных уравнений не может рассматриваться самостоятельно, и для нахождения его параметров традиционный МНК неприменим. С этой целью используются специальные приемы оценивания.

5.1. Структурная и приведенная формы модели

Система совместных, одновременных уравнений (или структурная форма модели) обычно содержит эндогенные и экзогенные переменные.

Эндогенные переменные — это зависимые переменные, число которых равно числу уравнений в системе и которые обозначаются через y.

Экзогенные переменные — это предопределенные переменные, влияющие на эндогенные переменные, но не зависящие от них. Обозначаются через x.

Классификация переменных на эндогенные и экзогенные зависит от теоретической концепции принятой модели. Экономические переменные могут выступать в одних моделях как эндогенные, а в других как экзогенные переменные. Внеэкономические переменные (например, климатические условия, социальное положение, пол, возрастная категория) входят в систему только как экзогенные переменные. В качестве экзогенных переменных могут рассматриваться значения эндогенных переменных за предшествующий период времени (*лаговые переменные*).

Структурная форма модели позволяет увидеть влияние изменений любой экзогенной переменной на значения эндогенной переменной. Целесообразно в качестве экзогенных переменных выбирать такие переменные, которые могут быть объектом регулирования. Меняя их и управляя ими, можно заранее иметь целевые значения эндогенных переменных.

Структурная форма модели в правой части содержит при эндогенных переменных коэффициенты b_{ik} и экзогенных переменных — коэффициенты a_{ij}, которые называются *структурными коэффициентами* модели. Все переменные в модели выражены в отклонениях от среднего уровня, т. е. под x подразумевается $x - \bar{x}$, а под y — соответственно $y - \bar{y}$. Поэтому свободный член в каждом уравнении системы (5.3) отсутствует.

Использование МНК для оценивания структурных коэффициентов модели дает, как принято считать в теории, смещенные и несостоятельные оценки. Поэтому обычно для определения структурных коэффициентов модели структурная форма модели преобразуется в *приведенную форму* модели.

Приведенная форма модели представляет собой систему линейных функций эндогенных переменных от экзогенных:

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \ldots + \delta_{1n}x_n + u_1, \\ y_2 = \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \ldots + \delta_{2n}x_n + u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = \delta_{m1}x_1 + \delta_{m2}x_2 + \ldots + \delta_{mn}x_n + u_m, \end{cases} \tag{5.4}$$

где δ_{ij} — коэффициенты приведенной формы модели, u_i — остаточная величина для приведенной формы.

По своему виду приведенная форма модели ничем не отличается от системы независимых уравнений, параметры которой оцениваются традиционным МНК. Применяя МНК, можно оценить δ_{ij}, а затем оценить значения эндогенных переменных через экзогенные.

Коэффициенты приведенной формы модели представляют собой нелинейные функции коэффициентов структурной формы модели. Рассмотрим это положение на примере простейшей структурной модели, выразив коэффициенты приведенной формы модели через коэффициенты структурной модели.

Для структурной модели вида

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + \varepsilon_2 \end{cases} \tag{5.5}$$

приведенная форма модели имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + u_1, \\ y_2 = \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + u_2. \end{cases} \tag{5.6}$$

Из первого уравнения (5.5) можно выразить y_2 следующим образом (ради упрощения опускаем случайную величину):

$$y_2 = \frac{y_1 - a_{11}x_1}{b_{12}}.$$

Подставляя во второе уравнение (5.5), имеем

$$\frac{y_1 - a_{11}x_1}{b_{12}} = b_{21}y_1 + a_{22}x_2,$$

откуда

$$y_1 = \frac{a_{11}}{1 - b_{12}b_{21}}x_1 + \frac{a_{22}b_{12}}{1 - b_{12}b_{21}}x_2.$$

Поступая аналогично со вторым уравнением системы (5.5), получим

$$y_2 = \frac{a_{11}b_{21}}{1 - b_{12}b_{21}}x_1 + \frac{a_{22}}{1 - b_{12}b_{21}}x_2,$$

т. е. система (5.5) принимает вид

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{a_{11}}{1 - b_{12}b_{21}}x_1 + \dfrac{a_{22}b_{12}}{1 - b_{12}b_{21}}x_2, \\ y_2 = \dfrac{a_{11}b_{21}}{1 - b_{12}b_{21}}x_1 + \dfrac{a_{22}}{1 - b_{12}b_{21}}x_2. \end{cases}$$

Таким образом, можно сделать вывод о том, что коэффициенты приведенной формы модели будут выражаться через коэффициенты структурной формы следующим образом:

$$\delta_{11} = \frac{a_{11}}{1 - b_{12}b_{21}}, \quad \delta_{12} = \frac{a_{22}b_{12}}{1 - b_{12}b_{21}},$$

$$\delta_{21} = \frac{a_{11}b_{21}}{1 - b_{12}b_{21}}, \quad \delta_{22} = \frac{a_{22}}{1 - b_{12}b_{21}}.$$

Следует заметить, что приведенная форма модели хотя и позволяет получить значения эндогенной переменной через значения экзогенных переменных, но аналитически она уступает структурной форме модели, так как в ней отсутствуют оценки взаимосвязи между эндогенными переменными.

5.2. Проблема идентификации

При переходе от приведенной формы модели к структурной эконометрист сталкивается с проблемой идентификации. Идентификация — это единственность соответствия между приведенной и структурной формами модели.

Структурная модель (5.3) в полном виде содержит $m\ (m + n - 1)$ параметров, а приведенная форма модели в полном виде содержит $m\ n$ параметров. Т. е. в полном виде структурная модель содержит большее число параметров, чем приведенная форма модели. Соответственно $m\ (m + n - 1)$параметров структурной модели не могут быть однозначно определены из $m\ n$ параметров приведенной формы модели.

Чтобы получить единственно возможное решение для структурной модели, необходимо предположить, что некоторые из структурных коэффициентов модели ввиду слабой взаимосвязи признаков с эндогенной переменной из левой части системы равны нулю. Тем самым уменьшится число структурных коэффициентов модели. Уменьшение числа структурных коэффициентов модели возможно и другим путем: например, путем приравнивания некоторых коэффициентов друг к другу, т.е. путем предположений, что их воздействие на формируемую эндогенную переменную одинаково. На структурные коэффициенты могут накладываться, например, ограничения вида $b_{ik} + a_{ij} = 0$.

С позиции идентифицируемости структурные модели можно подразделить на три вида:

1. идентифицируемые;
2. неидентифицируемые;
3. сверхидентифицируемые.

Модель *идентифицируема*, если все структурные ее коэффициенты определяются однозначно, единственным образом по коэффициентам приведенной формы модели, т. е. если число параметров структурной модели равно числу параметров приведенной формы модели. В этом случае структурные коэффициенты модели оцениваются через параметры приведенной формы модели и модель идентифицируема.

Модель *неидентифицируема*, если число приведенных коэффициентов меньше числа структурных коэффициентов, и в результате структурные коэффициенты не могут быть оценены через коэффициенты приведенной формы модели.

Модель *сверхидентифицируема*, если число приведенных коэффициентов больше числа структурных коэффициентов. В этом случае на основе коэффициентов приведенной формы можно получить два или более значений одного структурного коэффициента. В этой модели число структурных коэффициентов меньше числа коэффициентов приведенной формы. Сверхидентифицируемая модель в отличие от неидентифицируемой модели практически решаема, но требует для этого специальных методов исчисления параметров.

Структурная модель всегда представляет собой систему совместных уравнений, каждое из которых требуется проверять на идентификацию. Модель считается идентифицируемой, если каждое уравнение системы идентифицируемо. Если хотя бы одно из уравнений системы неидентифицируемо, то и вся модель считается неидентифицируемой. Сверхидентифицируемая модель содержит хотя бы одно сверхидентифицируемое уравнение.

Выполнение условия идентифицируемости модели проверяется для каждого уравнения системы. Чтобы уравнение было идентифицируемо, необходимо, чтобы число предопределенных переменных, отсутствующих в данном уравнении, но присутствующих в системе, было равно числу эндогенных переменных в данном уравнении без одного.

Если обозначить число эндогенных переменных в i-м уравнении системы через H, а число экзогенных (предопределенных) переменных, которые содержатся в системе, но не входят в данное уравнение, — через D, то условие идентифицируемости модели может быть записано в виде следующего счетного правила:

$D + 1 = H$	уравнение идентифицируемо
$D + 1 < H$	уравнение неидентифицируемо
$D + 1 > H$	уравнение сверхидентифицируемо

Для оценки параметров структурной модели система должна быть идентифицируема или сверхидентифицируема.

Рассмотренное счетное правило отражает необходимое, но недостаточное условие идентификации. Более точно условия идентификации определяются, если накладывать ограничения на коэффициенты матриц параметров структурной модели. Уравнение идентифицируемо, если по отсутствующим в нем переменным (эндогенным и экзогенным) можно из коэффициентов при них в других уравнениях системы получить матрицу, определитель которой не равен нулю, а ранг матрицы не меньше, чем число эндогенных переменных в системе без одного.

Целесообразность проверки условия идентификации модели через определитель матрицы коэффициентов, отсутствующих в данном уравнении, но присутствующих в других, объясняется тем, что возможна ситуация, когда для каждого уравнения системы выполнено счетное правило, а определитель матрицы названных коэффициентов равен нулю. В этом случае соблюдается лишь необходимое, но недостаточное условие идентификации.

В эконометрических моделях часто наряду с уравнениями, параметры которых должны быть статистически оценены, используются балансовые тождества переменных, коэффициенты при которых равны ± 1. В этом случае, хотя само тождество и не требует проверки на идентификацию, ибо коэффициенты при переменных в тождестве известны, в проверке на идентификацию собственно структурных уравнений системы тождества участвуют.

Рассмотрим **пример.** Изучается модель вида

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11} \cdot Y_t + b_{12} \cdot C_{t-1} + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{21} \cdot r_t + b_{22} \cdot I_{t-1} + \varepsilon_2, \\ r_t = a_3 + b_{31} \cdot Y_t + b_{32} \cdot M_t + \varepsilon_3, \\ Y_t = C_t + I_t + G_t, \end{cases}$$

где C_t — расходы на потребление в период t; Y_t — совокупный доход в период t; I_t — инвестиции в период t; r_t — процентная ставка в период t; M_t — денежная масса в период t; G_t — государственные расходы в период t; C_{t-1} — расходы на потребление в период $t - 1$; I_{t-1} — инвестиции в период $t - 1$. Первое уравнение — функция потребления, второе уравнение — функция инвестиций, третье уравнение — функция денежного рынка, четвертое уравнение — тождество дохода.

Модель представляет собой систему одновременных уравнений. Проверим каждое ее уравнение на идентификацию.

Модель включает четыре эндогенные переменные C (C_t, I, Y_t, r_t) и четыре предопределенные переменные (две экзогенные переменные — M_t и G_t и две лаговые переменные — C_{t-1} и I_{t-1}).

Проверим необходимое условие идентификации для каждого из уравнений модели.

Первое уравнение: $C_t = a_1 + b_{11} \cdot Y_t + b_{12} \cdot C_{t-1} + \varepsilon_1$. Это уравнение содержит две эндогенные переменные C_t и Y_t и одну предопределенную переменную C_{t-1}. Таким образом, $H = 2$, а $D = 4 - 1 = 3$, т. е. выполняется условие $D + 1 > H$. Уравнение сверхидентифицируемо.

Второе уравнение: $I_t = a_2 + b_{21} \cdot r_t + b_{22} \cdot I_{t-1} + \varepsilon_2$. Оно включает две эндогенные переменные I_t и r_t и одну экзогенную переменную I_{t-1}. Выполняется условие $D + 1 = 3 + 1 > H + 2$. Уравнение сверхидентифицируемо.

Третье уравнение: $r_t = a_3 + b_{31} \cdot Y_t + b_{32} \cdot M_t + \varepsilon_3$. Оно включает две эндогенные переменные Y_t и r_t и одну экзогенную переменную M_t. Выполняется условие $D + 1 = 3 + 1 > H = 2$. Уравнение сверхидентифицируемо.

Четвертое уравнение: $Y_t = C_t + I_t + G_t$. Оно представляет собой тождество, параметры которого известны. Необходимости в идентификации нет.

Проверим для каждого уравнения достаточное условие идентификации. Для этого составим матрицу коэффициентов при переменных модели.

	C_t	I_t	r_t	Y_t	C_{t-1}	I_{t-1}	M_t	G_t
I уравнение	–1	0	0	b_{11}	b_{12}	0	0	0
II уравнение	0	–1	b_{21}	0	0	b_{22}	0	0
III уравнение	0	0	–1	b_{31}	0	0	b_{32}	0
Тождество	1	1	0	–1	0	0	0	1

В соответствии с достаточным условием идентификации ранг матрицы коэффициентов при переменных, не входящих в исследуемое уравнение, должен быть равен числу эндогенных переменных модели без одного.

Первое уравнение. Матрица коэффициентов при переменных, не входящих в уравнение, имеет вид

	I_t	r_t	I_{t-1}	M_t	G_t
II уравнение	–1	b_{21}	b_{22}	0	0
III уравнение	0	–1	0	b_{32}	0
Тождество	1	0	0	0	1

Ранг данной матрицы равен трем, так как определитель квадратной подматрицы 3 × 3 не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & b_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = b_{22} b_{32} \neq 0 \cdot$$

Достаточное условие идентификации для данного уравнения выполняется.

Второе уравнение. Матрица коэффициентов при переменных, не входящих в уравнение, имеет вид

	C_t	Y_t	C_{t-1}	M_t	G_t
I уравнение	–1	b_{11}	b_{12}	0	0
III уравнение	0	b_{31}	0	b_{32}	0
Тождество	1	–1	0	0	1

Ранг данной матрицы равен трем, так как определитель квадратной подматрицы 3 × 3 не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & b_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = b_{12}b_{32} \neq 0 \cdot$$

Достаточное условие идентификации для данного уравнения выполняется.

Третье уравнение. Матрица коэффициентов при переменных, не входящих в уравнение, имеет вид

	C_t	I_t	C_{t-1}	I_{t-1}	G_t
I уравнение	–1	0	b_{12}	0	0
II уравнение	0	–1	0	b_{22}	0
Тождество	1	1	0	0	1

Ранг данной матрицы равен трем, так как определитель квадратной подматрицы 3 × 3 не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = b_{12}b_{22} \neq 0 \cdot$$

Достаточное условие идентификации для данного уравнения выполняется.

Таким образом, все уравнения модели сверхидентифицируемы. Приведенная форма модели в общем виде будет выглядеть следующим образом:

$$
\begin{cases}
C_t = A_1 + \delta_{11}C_{t-1} + \delta_{12}I_{t-1} + \delta_{13}M_t + \delta_{14}G_t + u_1, \\
I_t = A_2 + \delta_{21}C_{t-1} + \delta_{22}I_{t-1} + \delta_{23}M_t + \delta_{24}G_t + u_2, \\
r_t = A_3 + \delta_{31}C_{t-1} + \delta_{32}I_{t-1} + \delta_{33}M_t + \delta_{34}G_t + u_3, \\
Y_t = A_4 + \delta_{41}C_{t-1} + \delta_{42}I_{t-1} + \delta_{43}M_t + \delta_{44}G_t + u_1.
\end{cases}
$$

5.3. Методы оценки параметров структурной формы модели

Коэффициенты структурной модели могут быть оценены разными способами в зависимости от вида системы одновременных уравнений. Наибольшее распространение в литературе получили следующие методы оценивания коэффициентов структурной модели:

1. косвенный метод наименьших квадратов;
2. двухшаговый метод наименьших квадратов;
3. трехшаговый метод наименьших квадратов;
4. метод максимального правдоподобия с полной информацией;
5. метод максимального правдоподобия при ограниченной информации.

Рассмотрим вкратце сущность каждого из этих методов.

Косвенный метод наименьших квадратов (КМНК) применяется в случае точно идентифицируемой структурной модели. Процедура применения КМНК предполагает выполнение следующих этапов работы:

1. Структурная модель преобразовывается в приведенную форму модели.
2. Для каждого уравнения приведенной формы модели обычным МНК оцениваются приведенные коэффициенты δ_{ij}.
3. Коэффициенты приведенной формы модели трансформируются в параметры структурной модели.

Если система сверхидентифицируема, то КМНК не используется, ибо он не дает однозначных оценок для параметров структурной модели. В этом случае могут использоваться разные методы оценивания, среди которых наиболее распространенным и простым является двухшаговый метод наименьших квадратов (ДМНК).

Основная идея ДМНК — на основе приведенной формы модели получить для сверхидентифицируемого уравнения теоретические значения эндогенных переменных, содержащихся в правой части уравнения.

Далее, подставив их вместо фактических значений, можно применить обычный МНК к структурной форме сверхидентифицируемого уравнения. Метод получил название двухшагового МНК, ибо дважды используется МНК: на первом шаге при определении приведенной формы модели и нахождении на ее основе оценок теоретических значений эндогенной переменной

$\hat{y}_i = \delta_{i1}x_1 + \delta_{i2}x_2 + \ldots + \delta_{in}x_n$ и на втором шаге применительно к структурному сверхидентифицируемому уравнению при определении структурных коэффициентов модели по данным теоретических (расчетных) значений эндогенных переменных.

Сверхидентифицируемая структурная модель может быть двух типов:

1. все уравнения системы сверхидентифицируемы;
2. система содержит наряду со сверхидентифицируемыми точно идентифицируемые уравнения.

Если все уравнения системы сверхидентифицируемые, то для оценки структурных коэффициентов каждого уравнения используется ДМНК. Если в системе есть точно идентифицируемые уравнения, то структурные коэффициенты по ним находятся из системы приведенных уравнений.

Для примера, рассмотренного в предыдущем параграфе, необходимо применить именно двухшаговый метод наименьших квадратов. Но можно сделать следующее замечание. Если из модели исключить тождество дохода, число эндогенных переменных модели снизится на единицу — переменная Y_t станет экзогенной. А число предопределенных переменных модели не изменится, т. к. из модели будет исключена эндогенная переменная G_t, но ее место займет переменная Y_t. В правых частях функции потребления и функции денежного рынка будут находиться только предопределенные переменные. Функция инвестиций постулирует зависимость эндогенной переменнойI_t от эндогенной переменной r_t (которая зависит только от предопределенных переменных) и предопределенной переменной I_{t-1}. Таким образом, мы получим рекурсивную систему. Ее параметры можно оценивать обычным МНК, и нет необходимости исследования уравнения на идентификацию.

Косвенный и двухшаговый методы наименьших квадратов подробно описаны в литературе и рассматриваются как традиционные методы оценки коэффициентов структурной модели. Эти методы достаточно легко реализуемы.

Метод максимального правдоподобия рассматривается как наиболее общий метод оценивания, результаты которого при нормальном распределении признаков совпадают с МНК. Однако при большом числе уравнений системы этот метод приводит к достаточно сложным вычислительным процедурам. Поэтому в качестве модификации используется метод максимального правдоподобия при ограниченной информации (метод наименьшего дисперсионного отношения), разработанный в 1949 году Т. Андерсоном и Н. Рубиным.

В отличие от метода максимального правдоподобия в данном методе сняты ограничения на параметры, связанные с функционированием системы в целом. Это делает решение более простым, но трудоемкость вычислений остается достаточно высокой. Несмотря на его значительную популярность, к середине 60-х годов он был практически вытеснен двухшаговым методом наименьших квадратов (ДМНК) в связи с гораздо большей простотой последнего.

Дальнейшим развитием ДМНК является трехшаговый МНК (ТМНК), предложенный в 1962 году А. Зельнером и Г. Тейлом. Этот метод оценивания пригоден для всех видов уравнений структурной модели. Однако при некоторых ограничениях на параметры более эффективным оказывается ДМНК.

6. ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

При построении эконометрической модели используются два типа данных:

1. данные, характеризующие совокупность различных объектов в определенный момент времени;
2. данные, характеризующие один объект за ряд последовательных моментов времени.

Модели, построенные по данным первого типа, называются *пространственными моделями*. Модели, построенные на основе второго типа данных, называются *моделями временных рядов*.

Временные ряды специфических (финансовых) показателей являются объектом исследования одного из самых «древних» направлений эконометрики — финансовой эконометрики, истоки которого лежат в XVI веке. Именно в те годы стали формироваться финансовые рынки и биржи — источники исходной информации для теоретических и прикладных исследований в этой сфере. К финансовым показателям обычно относят курсы акций, облигаций и других ценных бумаг, цены на ресурсы, курсы валют и стоимостные характеристики других товаров, сделок, реализуемых и заключаемых на этих рынках и биржах.

Финансовый рынок является комплексным, многоплановым понятием. Теоретически его можно рассматривать как механизм реализации всевозможных активов по ценам, устанавливающимся на основе соотношения складывающегося на них спроса и их предложения. Часто финансовый рынок подразделяют на рынок ценных бумаг (акции, облигации, производные ценные бумаги, типа форвардных, фьючерсных контрактов, опционы и т. п.) и на рынок внебиржевых ресурсов (банковские услуги, займы, кредиты и т. д.).

Временной ряд (ряд динамики) — это совокупность значений какого-либо показателя за несколько последовательных моментов или периодов времени. Каждый уровень временного ряда формируется под воздействием большого числа факторов, которые условно можно подразделить на три группы:

1. факторы, формирующие тенденцию ряда;
2. факторы, формирующие циклические колебания ряда;
3. случайные факторы.

Рассмотрим воздействие каждого фактора на временной ряд в отдельности.

Большинство временных рядов экономических показателей имеют тенденцию, характеризующую совокупное долговременное воздействие множества факторов на динамику изучаемого показателя. Все эти факторы, взятые в отдельности, могут оказывать разнонаправленное воздействие на исследуемый показатель. Однако в совокупности они формируют его возрастающую или убывающую тенденцию. На рисунке 6.1 показан гипотетический временной ряд, содержащий возрастающую тенденцию.

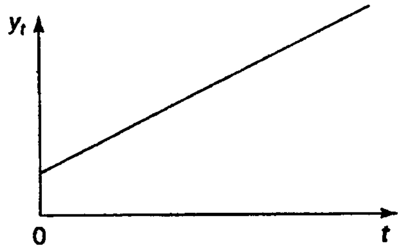


Рисунок 6.1 — Возрастающий временной ряд

Также изучаемый показатель может быть подвержен циклическим колебаниям. Эти колебания могут носить сезонный характер, поскольку экономическая деятельность ряда отраслей экономики зависит от времени года (например, цены на сельскохозяйственную продукцию в летний период выше, чем в зимний; уровень безработицы в курортных городах в зимний период выше по сравнению с летним). При наличии больших массивов данных за длительные промежутки времени можно выявить циклические колебания, связанные с общей динамикой конъюнктуры рынка. На рисунке 6.2 представлен гипотетический временной ряд, содержащий только сезонную компоненту.

Рисунок 6.2 —Временной ряд с сезонной компонентой

Некоторые временные ряды не содержат тенденции и циклической компоненты, а каждый следующий их уровень образуется как сумма среднего уровня ряда и некоторой (положительной или отрицательной) случайной компоненты. Пример ряда, содержащего только случайную компоненту, приведен на рисунке 6.3.

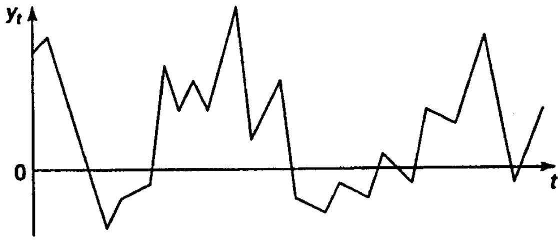


Рисунок 6.3 — Временной ряд со случайной компонентой

Очевидно, что реальные данные не следуют целиком и полностью из каких-либо описанных выше моделей. Чаще всего они содержат все три компоненты. Каждый их уровень формируется под воздействием тенденции, сезонных колебаний и случайной компоненты.

В большинстве случаев фактический уровень временного ряда можно представить как сумму или произведение трендовой, циклической и случайной компонент. Модель, в которой временной ряд представлен как сумма перечисленных компонент, называется *аддитивной моделью* временного ряда. Модель, в которой временной ряд представлен как произведение перечисленных компонент, называется *мультипликативной моделью* временного ряда. Основная задача эконометрического исследования отдельного временного ряда — выявление и придание количественного выражения каждой из перечисленных выше компонент с тем, чтобы использовать полученную информацию для прогнозирования будущих значений ряда или при построении моделей взаимосвязи двух или более временных рядов.

6.1. Автокорреляция уровней временного ряда

При наличии во временном ряде тенденции и циклических колебаний значения каждого последующего уровня ряда зависят от предыдущих. Корреляционную зависимость между последовательными уровнями временного ряда называют автокорреляцией уровней ряда.

Количественно ее можно измерить с помощью линейного коэффициента корреляции между уровнями исходного временного ряда и уровнями этого ряда, сдвинутыми на несколько шагов во времени.

Формула для расчета коэффициента корреляции имеет вид:

$$r_{xy}=\frac{\sum\left(x_j-x\right)\cdot\left(y_j-y\right)}{\sqrt{\sum\left(x_j-x\right)^2\cdot\sum\left(y_j-y\right)^2}}.$$

Формула для расчета коэффициента автокорреляции будет иметь вид (в качестве переменной x мы рассмотрим ряд y_2, y_3 , ..., y_8; в качестве переменной y — ряд $y_1, y_2, ..., y_7$):

$$r_1 = \frac{\sum\limits_{t=2}^{n} \; y_t - \bar{y}_1 \quad y_{t-1} - \bar{y}_2}{\sqrt{\sum\limits_{t=2}^{n} \; y_t - \bar{y}_1 \;\; ^2 \sum\limits_{t=2}^{n} \; y_{t-1} - \bar{y}_2 \;\; ^2}}, \tag{6.1}$$

где

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{n-1}\sum_{t=2}^{n} y_t, \qquad \bar{y}_2 = \frac{1}{n-1}\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}.$$

Эту величину называют коэффициентом автокорреляции уровней ряда первого порядка, так как он измеряет зависимость между соседними уровнями ряда t и y_{t-1}.

Аналогично можно определить коэффициенты автокорреляции второго и более высоких порядков. Так, коэффициент автокорреляции второго порядка характеризует тесноту связи между уровнями y_t и y_{t-2} и определяется по формуле:

$$r_2 = \frac{\sum\limits_{t=3}^{n} \; y_t - \bar{y}_3 \quad y_{t-2} - \bar{y}_4}{\sqrt{\sum\limits_{t=3}^{n} \; y_t - \bar{y}_3 \;\; ^2 \sum\limits_{t=3}^{n} \; y_{t-2} - \bar{y}_4 \;\; ^2}}, \tag{6.2}$$

где

$$\bar{y}_3 = \frac{1}{n-2}\sum_{t=3}^{n} y_t, \qquad \bar{y}_4 = \frac{1}{n-2}\sum_{t=3}^{n} y_{t-2}.$$

Пример 1. *Расчет коэффициентов автокорреляции уровней для временного ряда расходов на конечное потребление.*

Пусть имеются следующие условные данные о средних расходах на конечное потребление (y_t, у.е.) за 8 лет (табл. 6.1).

Разумно предположить, что расходы на конечное потребление в текущем году зависят от расходов на конечное потребление предыдущих лет.

Таблица 6.1— Данные о средних расходах на конечное потребление

t	y_t	y_{t-1}	$y_t - y_1$	$y_{t-1} - y_2$	$(y_t - y_1) \cdot (y_{t-1} - y_2)$	$(y_{t-1} - y_2)^2$	$(y_{t-1} - y_2)^2$
1	7						
2	8	7	–3,29	–3	9,87	10,8241	9
3	8	8	–3,29	–2	6,58	10,8241	4
4	10	8	–1,29	–2	2,58	1,6641	4
5	11	10	–0,29	0	0,00	0,0841	0
6	12	11	0,71	1	0,71	0,5041	1
7	14	12	2,71	2	5,42	7,3441	4
8	16	14	4,71	4	18,84	22,1841	16
Итого	86	70	–0,03	0	44,0	53,4287	38

Определим коэффициент корреляции между рядами y_t и y_{t-1} и измерим тесноту связи между расходами на конечное потребление текущего и предыдущего годов. Добавим в табл. 6.1 временной ряд y_{t-1}.

Для данных примера 1 соотношения (2) составляет:

$$y_1 = \frac{8+8+10+11+12+14+16}{7} = \frac{79}{7} = 11,29;$$

$$y_2 = \frac{7+8+8+10+11+12+14}{7} = \frac{70}{7} = 10.$$

Используя формулу (6.1), получаем коэффициент автокорреляции первого порядка:

$$r_1 = \frac{44}{\sqrt{53,42 \cdot 38}} = 0,976.$$

Полученное значение свидетельствует об очень тесной зависимости между расходами на конечное потребление текущего и непосредственно предшествующего годов и, следовательно, о наличии во временном ряде расходов на конечное потребление сильной линейной тенденции.

Аналогично можно определить коэффициенты автокорреляции второго и более высоких порядков. Так, коэффициент автокорреляции второго порядка характеризует тесноту связи между уровнями y_t и y_{t-1}.

Для данных из примера 1. получим:

$$y_3 = \frac{8+10+11+12+14+16}{6} = \frac{71}{6} = 11,83;$$

$$y_4 = \frac{7+8+8+10+11+12}{6} = \frac{56}{6} = 9,33.$$

Построим таблицу 6.2.

Таблица 6.2 — Расчет коэффициента автокорреляции второго порядка для временного ряда расходов на конечное потребление

t	y_t	y_{t-2}	$y_t - y_3$	$y_{t-2} - y_4$	$(y_t - y_3)\cdot(y_{t-2} - y_4)$	$(y_t - y_3)^2$	$(y_{t-2} - y_4)^2$
1	7						
2	8						
3	8	7	–3,83	–2,33	8,9239	14,6689	5,4289
4	10	8	–1,83	–1,33	2,4339	3,3489	1,7689
5	11	8	–0,83	–1,33	1,1039	0,6889	1,7689
6	12	10	0,17	0,67	0,1139	0,0289	0,4489
7	14	11	2,17	1,67	3,6239	4,7089	2,7889
8	16	12	4,17	2,67	11,1339	17,3889	7,1289
Итого	86	56	0,02	0,02	27,3334	40,8334	19,3334

Представив полученные значения в формулу (6.2), имеем:

$$r_2 = \frac{27{,}3334}{\sqrt{40{,}8334 \cdot 19{,}3334}} = 0{,}973.$$

Полученные результаты еще раз подтверждают вывод о том, что ряд расходов на конечное потребление содержит линейную тенденцию.

Число периодов, по которым рассчитывается коэффициент автокорреляции, называют *лагом*. С увеличением лага число пар значений, по которым рассчитывается коэффициент автокорреляции, уменьшается. Считается целесообразным для обеспечения статистической достоверности коэффициентов автокорреляции использовать правило — максимальный лаг должен быть не больше $n/4$.

Свойства коэффициента автокорреляции.

Он строится по аналогии с линейным коэффициентом корреляции и таким образом характеризует тесноту только линейной связи текущего и предыдущего уровней ряда. Поэтому по коэффициенту автокорреляции можно судить о наличии линейной (или близкой к линейной) тенденции. Для некоторых временных рядов, имеющих сильную нелинейную тенденцию (например, параболу второго порядка или экспоненту), коэффициент автокорреляции уровней исходного ряда может приближаться к нулю.

По знаку коэффициента автокорреляции нельзя делать вывод о возрастающей или убывающей тенденции в уровнях ряда. Большинство временных рядов экономических данных содержат положительную автокорреляцию уровней, однако при этом могут иметь убывающую тенденцию.

Последовательность коэффициентов автокорреляции уровней первого, второго и т. д. порядков называют *автокорреляционной функцией* временного ряда. График зависимости ее значений от величины лага (порядка коэффициента автокорреляции) называется *коррелограммой*.

Анализ автокорреляционной функции и коррелограммы позволяет определить лаг, при котором автокорреляция наиболее высокая, а следовательно, и лаг, при котором связь между текущим и предыдущими уровнями ряда наиболее тесная, т.е. можно выявить структуру ряда.

Если наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции первого порядка, исследуемый ряд содержит только тенденцию. Если наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции порядка τ, то ряд содержит циклические колебания с периодичностью в τ моментов времени. Если ни один из коэффициентов автокорреляции не является значимым, можно сделать одно из двух предположений относительно структуры этого ряда: либо ряд не содержит тенденции и циклических колебаний, либо ряд содержит сильную нелинейную тенденцию, для выявления которой нужно провести дополнительный анализ. Поэтому коэффициент автокорреляции уровней и автокорреляционную функцию целесообразно использовать для выявления во временном ряде наличия или отсутствия трендовой компоненты и циклической (сезонной) компоненты.

Временной ряд расходов на конечное потребление, рассмотренный нами на примере 2, содержит только тенденцию, так, как коэффициенты автокорреляции его уровней высокие.

Пример 2.Автокорреляционнаяфункция и выявление структуры ряда.

Пусть имеются условные данные об объемах потребления электроэнергии(млн кВт · ч)жителями за 16 кварталов (табл. 6.3).

Таблица 6.3 — Данные об объемах потребления электроэнергии

t	y_t	y_{t-1}	y_{t-2}	y_{t-3}	y_{t-4}
1	6,0				
2	4,4	6,0			
3	5,0	4,4	6,0		
4	9,0	5,0	4,4	6,0	
5	7,2	9,0	5,0	4,4	6,0
6	4,8	7,2	9,0	5,0	4,4
7	6,0	4,8	7,2	9,0	5,0
8	10,0	6,0	4,8	7,2	9,0
9	8,0	10,0	6,0	4,8	7,2
10	5,6	8,0	10,0	6,0	4,8
11	6,4	5,6	8,0	10,0	6,0
12	11,0	6,4	5,6	8,0	10,0
13	9,0	11,0	6,4	5,6	8,0
14	6,6	9,0	11,0	6,4	5,6
15	7,0	6,6	9,0	11,0	6,4
16	10,8	7,0	6,6	9,0	11,0

Нанесем эти значения на график (рис. 6.4).

Рисунок 6.4 — Потребление электроэнергии жителями региона

Определим коэффициент автокорреляции первого порядка (добавим y_{t-1} в таблицу 6.3 и воспользуемся формулой расчета линейного коэффициента корреляции). Он составит: $r_1 = 0{,}165$. Отметим, что расчет этого коэффициента производился по 15, а не по 16 парам наблюдений. Это значение свидетельствует о слабой зависимости текущих уровней. Однако, как следует из графика, структура этого ряда такова, что каждый следующий уровень y_t зависит от уровня y_{y-4} и y_{t-2} в гораздо большей степени, чем от уровня y_{t-1}. Построим ряд y_{t-2} (см. табл. 6.3). Рассчитав коэффициент автокорреляции второго порядка r_2, получим количественную характеристику корреляционной связи рядов y_2, y_{t-2}: $r_2 = 0{,}567$. Продолжив расчеты аналогичным образом, получим автокорреляционную функцию этого ряда. Ее значения и коррелограмма приведены в таблице 6.4.

Таблица 6.4 — Коррелограмма временного ряда потребления электроэнергии

Лаг	Коэффициент автокорреляции уровней	Коррелограмма
1	0,165154	**
2	0,566873	*******
3	0,113558	*
4	0,983025	************
5	0,118711	*
6	0,722046	*********
7	0,003367	
8	0,973848	************

Анализ значений автокорреляционной функции позволяет сделать вывод о наличии в изучаемом временном ряде, *во-первых*, линейной тенденции, *во-вторых*, сезонных колебаний периодичностьюв четыре квартала. Данный вывод подтверждается и графическим анализом структуры ряда (см. рис. 6.4).

Аналогично, если, например, при анализе временного ряда наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции уровней второго порядка, ряд содержит циклические колебания в два периода времени, т. е. имеет ***пилообразную структуру.***

6.2. Моделирование тенденции временного ряда

Распространенным способом моделирования тенденции временного ряда является построение аналитической функции, характеризующей зависимость уровней ряда от времени, или тренда. Этот способ называют *аналитическим выравниванием временного ряда*.

Поскольку зависимость от времени может принимать разные формы, для ее формализации можно использовать различные виды функций. Для построения трендов чаще всего применяются следующие функции:

— линейный тренд: $\hat{y}_t = a + b \cdot t$;

— гипербола: $\hat{y}_t = a + {}^{b}\!/_{t}$;

— экспоненциальный тренд: $\hat{y}_t = \mathrm{e}^{a+b\cdot t}$ (или $\hat{y}_t = a \cdot b^t$);

— степенная функция: $\hat{y}_t = a \cdot t^b$;

— полиномы различных степеней: $\hat{y}_t = a + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2 + \ldots + b_m \cdot t^m$.

Параметры каждого из перечисленных выше трендов можно определить обычным МНК, используя в качестве независимой переменной время $t = 1, 2, \ldots, n$, а в качестве зависимой переменной — фактические уровни временного ряда $\hat{y}_t$. Для нелинейных трендов предварительно проводят стандартную процедуру их линеаризации.

Существует несколько способов определения типа тенденции. К числу наиболее распространенных способов относятся качественный анализ изучаемого процесса, построение и визуальный анализ графика зависимости уровней ряда от времени. В этих же целях можно использовать и коэффициенты автокорреляции уровней ряда. Тип тенденции можно определить путем сравнения коэффициентов автокорреляции первого порядка, рассчитанных по исходным и преобразованным уровням ряда. Если временной ряд имеет линейную тенденцию, то его соседние уровни $\hat{y}_t$ и $\hat{y}_{t-1}$ тесно коррелируют. В этом случае коэффициент автокорреляции первого порядка уровней исходного ряда должен быть высоким. Если временной ряд содержит нелинейную тенденцию, например, в форме экспоненты, то коэффициент автокорреляции первого порядка по логарифмам уровней исходного ряда будет выше, чем соответствующий коэффициент, рассчитанный по уровням ряда. Чем сильнее выражена нелинейная тенденция в изучаемом временном ряде, тем в большей степени будут различаться значения указанных коэффициентов.

Выбор наилучшего уравнения в случае, когда ряд содержит нелинейную тенденцию, можно осуществить путем перебора основных форм тренда, расчета по каждому уравнению скорректированного коэффициента детерминации и средней ошибки аппроксимации. Этот метод легко реализуется при компьютерной обработке данных.

6.3. Моделирование сезонных колебаний

Простейший подход к моделированию сезонных колебаний — это расчет значений сезонной компоненты методом скользящей средней и построение аддитивной или мультипликативной модели временного ряда.

Общий вид аддитивной модели следующий:

$$Y = T + S + E.\cdot \tag{6.3}$$

Эта модель предполагает, что каждый уровень временного ряда может быть представлен как сумма трендовой (T), сезонной (S) и случайной (E) компонент.

Общий вид мультипликативной модели выглядит так:

$$Y = T\,S\,E. \tag{6.4}$$

Эта модель предполагает, что каждый уровень временного ряда может быть представлен как произведение трендовой (T), сезонной (S) и случайной (T) компонент.

Выбор одной из двух моделей осуществляется на основе анализа структуры сезонных колебаний. Если амплитуда колебаний приблизительно постоянна, строят аддитивную модель временного ряда, в которой значения сезонной компоненты предполагаются постоянными для различных циклов. Если амплитуда сезонных колебаний возрастает или уменьшается, строят мультипликативную модель временного ряда, которая ставит уровни ряда в зависимость от значений сезонной компоненты.

Построение аддитивной и мультипликативной моделей сводится к расчету значений T, S, и E для каждого уровня ряда.

Процесс построения модели включает в себя следующие шаги:

1. Выравнивание исходного ряда методом скользящей средней.
2. Расчет значений сезонной компоненты S.
3. Устранение сезонной компоненты из исходных уровней ряда и получение выровненных данных ($T + E$) в аддитивной или (TE) в мультипликативной модели.
4. Аналитическое выравнивание уровней ($T + E$) или (TE) и расчет значений T с использованием полученного уравнения тренда.
5. Расчет полученных по модели значений ($T + E$) или (TE).
6. Расчет абсолютных и/или относительных ошибок. Если полученные значения ошибок не содержат автокорреляции, ими можно заменить исходные уровни ряда и в дальнейшем использовать временной ряд ошибок E для анализа взаимосвязи исходного ряда и других временных рядов.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ТЕМАМ

Парная регрессия и корреляция

1. Наиболее наглядным видом выбора уравнения парной регрессии является:

а) аналитический;

б) графический;

в) экспериментальный (табличный).

2. Рассчитывать параметры парной линейной регрессии можно, если у нас есть:

а) не менее 5 наблюдений;

б) не менее 7 наблюдений;

в) не менее 10 наблюдений.

3. Суть метода наименьших квадратов состоит в:

а) минимизации суммы остаточных величин;

б) минимизации дисперсии результативного признака;

в) минимизации суммы квадратов остаточных величин.

4. Коэффициент линейного парного уравнения регрессии:

а) показывает среднее изменение результата с изменением фактора на одну единицу;

б) оценивает статистическую значимость уравнения регрессии;

в) показывает, на сколько процентов изменится в среднем результат, если фактор изменится на 1%.

5. На основании наблюдений за 50 семьями построено уравнение регрессии $\hat{y} = 284{,}56 + 0{,}672x$***, где y — потребление, x — доход. Соответствуют ли знаки и значения коэффициентов регрессии теоретическим представлениям?***

а) да;

б) нет;

в) ничего определенного сказать нельзя.

6. Суть коэффициента детерминации r_{xy}^2 ***состоит в следующем:***

а) оценивает качество модели из относительных отклонений по каждому наблюдению;

б) характеризует долю дисперсии результативного признака *y*, объясняемую регрессией, в общей дисперсии результативного признака;

в) характеризует долю дисперсии *y*, вызванную влиянием не учтенных в модели факторов.

7. Качество модели из относительных отклонений по каждому наблюдению оценивает:

а) коэффициент детерминации r_{xy}^2;

б) F-критерий Фишера;

в) средняя ошибка аппроксимации $\bar{A}$.

8. Значимость уравнения регрессии в целом оценивает:

а) F-критерий Фишера;

б) t-критерий Стьюдента;

в) коэффициент детерминации r_{xy}^2.

9. Классический метод к оцениванию параметров регрессии основан на:

а) методе наименьших квадратов:

б) методе максимального правдоподобия:

в) шаговом регрессионном анализе.

10. Остаточная сумма квадратов равна нулю:

а) когда правильно подобрана регрессионная модель;

б) когда между признаками существует точная функциональная связь;

в) никогда.

11. Объясненная (факторная) сумма квадратов отклонений в линейной парной модели имеет число степеней свободы, равное:

а) $n-1$;

б) 1;

в) $n-2$.

12. Остаточная сумма квадратов отклонений в линейной парной модели имеет число степеней свободы, равное:

а) $n-1$;

б) 1;

в) $n-2$.

13. Общая сумма квадратов отклонений в линейной парной модели имеет число степеней свободы, равное:

а) $n-1$;

б) 1;

в) $n-2$.

14. Для оценки значимости коэффициентов регрессии рассчитывают:

а) F-критерий Фишера;

б) t-критерий Стьюдента;

в) коэффициент детерминации r_{xy}^2.

15. Какое уравнение регрессии нельзя свести к линейному виду:

а) $\hat{y}_x = a + b \cdot \ln x$;

б) $\hat{y}_x = a \cdot x^b$:

в) $\hat{y}_x = a + b \cdot x^c$.

16. Какое из уравнений является степенным:

а) $\hat{y}_x = a + b \cdot \ln x$;

б) $\hat{y}_x = a \cdot x^b$:

в) $\hat{y}_x = a + b \cdot x^c$.

17. Параметр b в степенной модели является:

а) коэффициентом детерминации;

б) коэффициентом эластичности;

в) коэффициентом корреляции.

18. Коэффициент корреляции r_{xy} может принимать значения:

а) от –1 до 1;

б) от 0 до 1;

в) любые.

19. Для функции $y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$ средний коэффициент эластичности имеет вид:

а) $\bar{Э} = \frac{b \cdot \bar{x}}{a + b \cdot \bar{x}}$;

б) $\bar{Э} = -\frac{b}{a \cdot \bar{x} + b}$;

в) $\bar{Э} = -\frac{b \cdot \bar{x}}{a + b \cdot \bar{x}}$.

20. Какое из следующих уравнений нелинейно по оцениваемым параметрам:

а) $y = a + b \cdot x + \varepsilon$;

б) $y = a + b \cdot \ln x + \varepsilon$;

в) $y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$.

Множественная регрессия и корреляция

1. Добавление в уравнение множественной регрессии новой объясняющей переменной:

а) уменьшает значение коэффициента детерминации;

б) увеличивает значение коэффициента детерминации;

в) не оказывает никакого влияния на коэффициент детерминации.

2. Скорректированный коэффициент детерминации:

а) меньше обычного коэффициента детерминации;

б) больше обычного коэффициента детерминации;

в) меньше или равен обычному коэффициенту детерминации;

3. С увеличением числа объясняющих переменных скорректированный коэффициент детерминации:

а) увеличивается;

б) уменьшается;

в) не изменяется.

Системы эконометрических уравнений

1. Наибольшее распространение в эконометрических исследованиях получили:

а) системы независимых уравнений;

б) системы рекурсивных уравнений;

в) системы взаимозависимых уравнений.

2. Эндогенные переменные — это:

а) предопределенные переменные, влияющие на зависимые переменные, но не зависящие от них, обозначаются через x;

б) зависимые переменные, число которых равно числу уравнений в системе и которые обозначаются через y;

в) значения зависимых переменных за предшествующий период времени.

3. Экзогенные переменные — это:

а) предопределенные переменные, влияющие на зависимые переменные, но не зависящие от них, обозначаются через x;

б) зависимые переменные, число которых равно числу уравнений в системе и которые обозначаются через y;

в) значения зависимых переменных за предшествующий период времени.

4. Лаговые переменные — это:

а) предопределенные переменные, влияющие на зависимые переменные, но не зависящие от них, обозначаются через x;

б) зависимые переменные, число которых равно числу уравнений в системе и которые обозначаются через y;

в) значения зависимых переменных за предшествующий период времени.

5. Для определения параметров структурную форму модели необходимо преобразовать в:

а) приведенную форму модели;

б) рекурсивную форму модели;

в) независимую форму модели.

6. Модель идентифицируема, если:

а) число приведенных коэффициентов меньше числа структурных коэффициентов;

б) если число приведенных коэффициентов больше числа структурных коэффициентов;

в) если число параметров структурной модели равно числу параметров приведенной формы модели.

7. Модель неидентифицируема, если:

а) число приведенных коэффициентов меньше числа структурных коэффициентов;

б) если число приведенных коэффициентов больше числа структурных коэффициентов;

в) если число параметров структурной модели равно числу параметров приведенной формы модели.

8. Модель сверхидентифицируема, если:

а) число приведенных коэффициентов меньше числа структурных коэффициентов;

б) если число приведенных коэффициентов больше числа структурных коэффициентов;

в) если число параметров структурной модели равно числу параметров приведенной формы модели.

9. Уравнение идентифицируемо, если:

а) $D+1<H$;

б) $D+1=H$;

в) $D+1>H$.

10. Уравнение неидентифицируемо, если:

а) $D+1<H$;

б) $D+1=H$;

в) $D+1>H$.

11. Уравнение сверхидентифицируемо, если:

а) $D+1<H$;

б) $D+1=H$;

в) $D+1>H$.

12. Для определения параметров точно идентифицируемой модели:

а) применяется двухшаговый МНК;

б) применяется косвенный МНК;

б) ни один из существующих методов применить нельзя.

13. Для определения параметров сверхидентифицируемой модели:

а) применяется двухшаговый МНК;

б) применяется косвенный МНК;

б) ни один из существующих методов применить нельзя.

14. Для определения параметров неидентифицируемой модели:

а) применяется двухшаговый МНК;

б) применяется косвенный МНК;

б) ни один из существующих методов применить нельзя.

Временные ряды

1. Аддитивная модель временного ряда имеет вид:

а) $Y=T\cdot S\cdot E$;

б) $Y=T+S+E$;

в) $Y=T\cdot S+E$.

2. Мультипликативная модель временного ряда имеет вид:

а) $Y=T\cdot S\cdot E$;

б) $Y=T+S+E$;

в) $Y=T\cdot S+E$.

3. Коэффициент автокорреляции:

а) характеризует тесноту линейной связи текущего и предыдущего уровней ряда;

б) характеризует тесноту нелинейной связи текущего и предыдущего уровней ряда;

в) характеризует наличие или отсутствие тенденции.

4. Аддитивная модель временного ряда строится, если:

а) значения сезонной компоненты предполагаются постоянными для различных циклов;

б) амплитуда сезонных колебаний возрастает или уменьшается;

в) отсутствует тенденция.

5. Мультипликативная модель временного ряда строится, если:

а) значения сезонной компоненты предполагаются постоянными для различных циклов;

б) амплитуда сезонных колебаний возрастает или уменьшается;

в) отсутствует тенденция.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

1. Определение эконометрики. Эконометрический метод и этапы эконометрического исследования.
2. Типы экономических данных, используемых в эконометрических исследованиях. Специфика экономических данных.
3. Переменные эконометрических моделей.
4. Типы эконометрических моделей.
5. Примеры постановки задач, для решения которых используются эконометрические методы.
6. Линейная модель парной регрессии и корреляции.
7. Выбор вида математической функции $\hat{y}_x = f(x)$.
8. Коэффициент корреляции и коэффициент детерминации.
9. Парная регрессия. Способы задания уравнения парной регрессии.
10. Оценка существенности уравнения в целом и отдельных его параметров (F-критерий Фишера и t-критерий Стьюдента).
11. Стандартные ошибки параметров.
12. Прогноз по линейному уравнению регрессии. Средняя ошибка аппроксимации.
13. Нелинейная регрессия. Классы нелинейных регрессий.
14. Регрессии нелинейные относительно включенных в анализ объясняющих переменных.
15. Регрессии нелинейные по оцениваемым параметрам.
16. Коэффициенты эластичности для разных видов регрессионных моделей.
17. Отбор факторов при построении уравнения множественной регрессии.
18. Частные коэффициенты корреляции.
19. Обобщенный метод наименьших квадратов для линейной регрессии.
20. Понятие производственной функции одной переменной.
21. Производственные функции нескольких переменных.
22. Свойства и основные характеристики производственных функций.
23. Примеры использования производственных функций в задачах экономического анализа, прогнозирования и планирования.
24. Общие понятия о системах эконометрических уравнений.
25. Структурная и приведенная формы модели.
26. Проблема идентификации. Необходимое условие идентифицируемости.
27. Проблема идентификации. Достаточное условие идентифицируемости.
28. Методы оценки параметров структурной формы модели.
29. Основные элементы временного ряда.
30. Автокорреляция уровней временного ряда и выявление его структуры.
31. Моделирование тенденции временного ряда.
32. Моделирование сезонных колебаний: аддитивная модель временного ряда.
33. Моделирование сезонных колебаний: мультипликативная модель временного ряда.

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИИ

Тема А1. Парная регрессия и корреляция

Пример задачи 1. По территориям региона приводятся данные за определенный год

Таблица А.1

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., x	Среднедневная заработная плата, руб., y
1	78	133
2	82	148
3	87	134
4	79	154
5	89	162
6	106	195
7	67	139
8	88	158
9	73	152
10	87	162
11	76	159
12	115	173

Задание.

1. Построить линейное уравнение парной регрессии y от x.
2. Рассчитать линейный коэффициент парной корреляции и среднюю ошибку аппроксимации.
3. Оценить статистическую значимость параметров регрессии и корреляции с помощью F-критерия Фишера и t-критерия Стьюдента.
4. Выполнить прогноз заработной платы y при прогнозном значении среднедушевого прожиточного минимума x, составляющем 107 % от среднего уровня.
5. Оценить точность прогноза, рассчитав ошибку прогноза и его доверительный интервал.
6. На одном графике построить исходные данные и теоретическую прямую.

Решение

1. Для расчета параметров уравнения линейной регрессии строим расчетную таблицу А.2.

Таблица А.2

	x	y	yx	x^2	y^2	$\hat{y}_x$	$y-\hat{y}_x$	A_i
1	78	133	10374	6084	17689	149	-16	12,0
2	82	148	12136	6724	21904	152	-4	2,7
3	87	134	11658	7569	17956	157	-23	17,2
4	79	154	12166	6241	23716	150	4	2,6
5	89	162	14418	7921	26244	159	3	1,9
6	106	195	20670	11236	38025	174	21	10,8
7	67	139	9313	4489	19321	139	0	0,0
8	88	158	13904	7744	24964	158	0	0,0
9	73	152	11096	5329	23104	144	8	5,3
10	87	162	14094	7569	26244	157	5	3,1
11	76	159	12084	5776	25281	147	12	7,5
12	115	173	19895	13225	29929	183	-10	5,8
Итого	1027	1869	161808	89907	294377	1869	0	68,9
Среднее значение	85,6	155,8	13484,0	7492,3	24531,4	–	–	5,7
σ	12,84	16,05	–	–	–	–	–	–
σ^2	164,94	257,76	–	–	–	–	–	–

$$b = \frac{\overline{y \cdot x} - \bar{y} \cdot \bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{13484 - 155,8 \cdot 85,6}{7492,3 - 85,6^2} = \frac{147,52}{164,94} = 0,89;$$

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x} = 155,8 - 0,89 \cdot 85,6 = 79,62.$$

Получено уравнение регрессии: $y = 79,62 + 0,89x$.

С увеличением среднедушевого прожиточного минимума на 1 руб. среднедневная заработная плата возрастает в среднем на 0,89 руб.

2. Тесноту линейной связи оценит коэффициент корреляции:

$$r_{xy} = b \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0,89 \cdot \frac{12,84}{16,05} = 0,712; \; r_{xy}^2 = 0,51.$$

Это означает, что 51 % вариации заработной платы (y) объясняется вариацией фактора x — среднедушевого прожиточного минимума.

Качество модели определяет средняя ошибка аппроксимации:

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \sum A_i = \frac{68,9}{12} = 5,74\%.$$

Качество построенной модели оценивается как хорошее, так как $\bar{A}$ не превышает 8–10 %.

3. Оценку значимости уравнения регрессии в целом проведем с помощью F-критерия Фишера. Фактическое значение F-критерия:

$$F_{\text{факт}} = \frac{r_{xy}^2}{1 - r_{xy}^2} \cdot \; n - 2 \; = \frac{0{,}51}{1 - 0{,}51} \cdot 10 = 10{,}41 .$$

Табличное значение критерия при пятипроцентном уровне значимости и степенях свободы $k_1 = 1$ и $k_2 = 12 - 2 = 10$ составляет $F_{\text{табл}} = 4{,}96$. Так как $F_{\text{факт}} = 10{,}41 > F_{\text{табл}} = 4{,}96$, то уравнение регрессии признается статистически значимым.

Оценку статистической значимости параметров регрессии проведем с помощью t-статистики Стьюдента и путем расчета доверительного интервала каждого из показателей.

Табличное значение t-критерия для числа степеней свободы $df = n - 2 = 12 - 2 = 10$ и $a = 0{,}05$ составит $t_{\text{табл}} = 2{,}23$.

Определим случайные ошибки $m_a, m_b,\ m_{r_{xy}}$:

$$m_a = S_{\text{ост}} \cdot \frac{\sqrt{\sum x^2}}{n \cdot \sigma_x} = 12{,}6 \cdot \frac{\sqrt{89907}}{12 \cdot 12{,}84} = 24{,}5 ;$$

$$m_b = \frac{S_{\text{ост}}}{\sigma_x \cdot \sqrt{n}} = \frac{12{,}6}{12{,}95 \cdot \sqrt{12}} = 0{,}281;$$

$$m_{r_{xy}} = \sqrt{\frac{1 - r_{xy}^2}{n - 2}} = \sqrt{\frac{1 - 0{,}51}{12 - 2}} = 0{,}219 .$$

Тогда

$$t_a = \frac{a}{m_a} = \frac{79{,}616}{24{,}6} = 3{,}2 ;$$

$$t_b = \frac{b}{m_b} = \frac{0{,}89}{0{,}281} = 3{,}2 ;$$

$$t_{r_{xy}} = \frac{r_{xy}}{m_{r_{xy}}} = \frac{0{,}712}{0{,}219} = 3{,}3 .$$

Фактические значения t-статистики превосходят табличное значение:

$$t_a = 3{,}2 > t_{\text{табл}} = 2{,}3; \quad t_b = 3{,}3 > t_{\text{табл}} = 2{,}3; \quad t_{r_{xy}} = 3{,}3 > t_{\text{табл}} = 2{,}3,$$

поэтому параметры a, b, и r_{xy} не случайно отличаются от нуля, а статистически значимы.

Рассчитаем доверительные интервалы для параметров регрессии a и b. Для этого определим предельную ошибку для каждого показателя:

$$\Delta_a = t_{\text{табл}} \cdot m_a = 2{,}23 \cdot 24{,}5 = 54{,}64;$$
$$\Delta_b = t_{\text{табл}} \cdot m_b = 2{,}23 \cdot 0{,}281 = 0{,}62.$$

Доверительные интервалы

$$\gamma_a = a \pm \Delta_a = 79{,}62 \pm 54{,}64;$$
$$\gamma_{a_{\min}} = 79{,}62 - 54{,}64 = 24{,}98;$$
$$\gamma_{a_{\max}} = 79{,}62 + 54{,}64 = 134{,}26;$$
$$\gamma_b = b \pm \Delta_b = 0{,}89 \pm 0{,}62;$$
$$\gamma_{b_{\min}} = 0{,}89 - 0{,}62 = 0{,}27;$$
$$\gamma_{b_{\max}} = 0{,}89 + 0{,}62 = 1{,}51.$$

Анализ верхней и нижней границ доверительных интервалов приводит к выводу о том, что с вероятностью $p = 1 - a = 0{,}95$ параметры a и b, находясь в указанных границах, не принимают нулевых значений, т. е. не являются статистически незначимыми и существенно отличны от нуля.

4. Полученные оценки уравнения регрессии позволяют использовать его для прогноза. Если прогнозное значение прожиточного минимума составит: $x_p = \overline{x} \cdot 1{,}07 = 85{,}6 \cdot 1{,}07 = 91{,}6$ руб., тогда прогнозное значение заработной платы составит: $\overline{y}_p = 79{,}62 + 0{,}89 \cdot 91{,}6 = 161{,}14$ руб.

5. Ошибка прогноза составит:

$$m_{\hat{y}_p} = S_{\text{ост}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_p - \overline{x})^2}{\sum (x - \overline{x})^2}} = 12{,}6 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{12} + \frac{(91{,}6 - 85{,}6)^2}{12 \cdot 12{,}84^2}} = 13{,}22.$$

Предельная ошибка прогноза, которая в 95% случаев не будет превышена, составит:

$$\Delta_{\hat{y}_p} = t_{\text{табл}} \cdot m_{\hat{y}_p} = 2{,}23 \cdot 13{,}22 = 29{,}48.$$

Доверительный интервал прогноза:

$$\gamma_{\hat{y}_p} = \hat{y}_p \pm \Delta_{\hat{y}_p} = 161{,}14 \pm 29{,}48;$$

$$\gamma_{\hat{y}_{p\min}} = 161{,}14 - 29{,}48 = 131{,}66 \text{ руб.};$$

$$\gamma_{\hat{y}_{p\max}} = 161{,}14 + 29{,}48 = 190{,}62 \text{ руб.}$$

Выполненный прогноз среднемесячной заработной платы является надежным (p = 1 – a – 0,05 = 0,95) и находится в пределах от 131,66 руб. до 190,62 руб.

6. В заключение решения задачи построим на одном графике исходные данные и теоретическую прямую (рис. А.1):

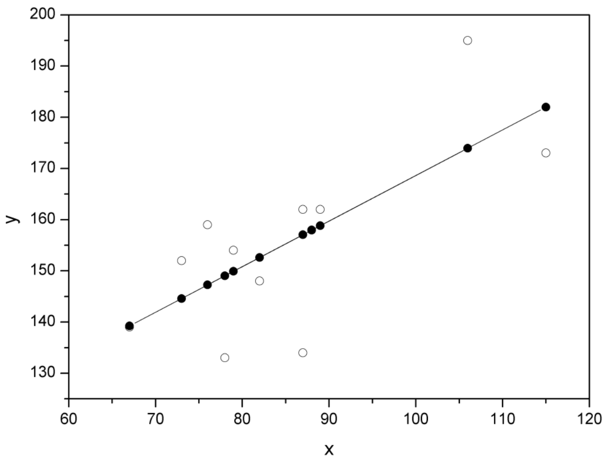


Рис. А.1. — График исходных данных и теоретической прямой

Варианты индивидуальных заданий

Задача 1. По территориям региона приводятся данные за 2000Х г. (см. таблицу своего варианта).

Задание.

1. Построить линейное уравнение парной регрессии y от x.

2. Рассчитать линейный коэффициент парной корреляции и среднюю ошибку аппроксимации.

3. Оценить статистическую значимость параметров регрессии и корреляции с помощью F-критерия Фишера и t-критерия Стьюдента.

4. Выполнить прогноз заработной платы y при прогнозном значении среднедушевого прожиточного минимума x, составляющем 107 % от среднего уровня.

5. Оценить точность прогноза, рассчитав ошибку прогноза и его доверительный интервал.

6. На одном графике построить исходные данные и теоретическую прямую.

Вариант 1

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., x	Среднедневная заработная плата, руб., y
1	81	124
2	77	131
3	85	146
4	79	139
5	93	143
6	100	159
7	72	135
8	90	152
9	71	127
10	89	154
11	82	127
12	111	162

Вариант 2

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., x	Среднедневная заработная плата, руб., y
1	74	122
2	81	134
3	90	136
4	79	125
5	89	120
6	87	127
7	77	125
8	93	148
9	70	122
10	93	157
11	87	144
12	121	165

Вариант 3

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., x	Среднедневная заработная плата, руб., y
1	77	123
2	85	152
3	79	140
4	93	142
5	89	157
6	81	181
7	79	133
8	97	163
9	73	134
10	95	155
11	84	132
12	108	165

Вариант 4

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., x	Среднедневная заработная плата, руб., y
1	83	137
2	88	142
3	75	128
4	89	140
5	85	133
6	79	153
7	81	142
8	97	154
9	79	132
10	90	150
11	84	132
12	112	166

Вариант 5

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., x	Среднедневная заработная плата, руб., y
1	79	134
2	91	154
3	77	128
4	87	138
5	84	133
6	76	144
7	84	160
8	94	149
9	79	125
10	98	163
11	81	120
12	115	162

Вариант 6

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., x	Среднедневная заработная плата, руб., y
1	92	147
2	78	133
3	79	128
4	88	152
5	87	138
6	75	122
7	81	145
8	96	141
9	80	127
10	102	151
11	83	129
12	94	147

Вариант 7

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., *x*	Среднедневная заработная плата, руб., *y*
1	75	133
2	78	125
3	81	129
4	93	153
5	86	140
6	77	135
7	83	141
8	94	152
9	88	133
10	99	156
11	80	124
12	112	156

Вариант 8

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., *x*	Среднедневная заработная плата, руб., *y*
1	69	124
2	83	133
3	92	146
4	97	153
5	88	138
6	93	159
7	74	145
8	79	152
9	105	168
10	99	154
11	85	127
12	94	155

Вариант 9

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., *x*	Среднедневная заработная плата, руб., *y*
1	78	133
2	94	139
3	85	141
4	73	127
5	91	154
6	88	142
7	73	122
8	82	135
9	99	142
10	113	168
11	69	124
12	83	130

Вариант 10

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., *x*	Среднедневная заработная плата, руб., *y*
1	97	161
2	73	131
3	79	135
4	99	147
5	86	139
6	91	151
7	85	135
8	77	132
9	89	161
10	95	159
11	72	120
12	115	160

Тема А.2. Системы эконометрических уравнений

Пример решения типовой задачи смотри в **разделе 5**.

Варианты индивидуальных заданий

Задача 2. Даны системы эконометрических уравнений.

Задание

1. Применив необходимое и достаточное условие идентификации, определите, идентифицируемо ли каждое из уравнений модели.
2. Определите метод оценки параметров модели.
3. Запишите в общем виде приведенную форму модели.

Вариант 1

Модель протекционизма Сальватора (упрощенная версия):

$$\begin{cases} M_t = a_1 + b_{12}N_t + b_{13}S_t + b_{14}E_{t-1} + b_{15}M_{t-1} + \varepsilon_1, \\ N_t = a_2 + b_{21}M_t + b_{23}S_t + b_{26}Y_t + \varepsilon_2, \\ S_t = a_3 + b_{31}M_t + b_{32}N_t + b_{36}X_t + \varepsilon_3. \end{cases}$$

где M — доля импорта в ВВП; N — общее число прошений об освобождении от таможенных пошлин; S — число удовлетворенных прошений об освобождении от таможенных пошлин; E — фиктивная переменная, равная 1 для тех лет, в которые курс доллара на международных валютных рынках был искусственно завышен, и 0 — для всех остальных лет; Y — реальный ВВП; X — реальный объем чистого экспорта; t — текущий период; $t-1$ — предыдущий период.

Вариант 2

Макроэкономическая модель (упрощенная версия модели Клейна):

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{12}Y_t + b_{13}T_t + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{21}Y_t + b_{24}K_{t-1} + \varepsilon_2, \\ Y_t = C_t + I_t, \end{cases}$$

где C — потребление; I — инвестиции; Y — доход; T — налоги; K — запас капитала; t — текущий период; $t-1$ — предыдущий период.

Вариант 3

Макроэкономическая модель экономики США (одна из версий):

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11}Y_t + b_{12}C_{t-1} + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{21}Y_t + b_{23}r_t + \varepsilon_2, \\ r_t = a_3 + b_{31}Y_t + b_{34}M_t + b_{35}r_{t-1} + \varepsilon_3, \\ Y_t = C_t + I_t + G_t, \end{cases}$$

где C — потребление; Y — ВВП; I — инвестиции; r — процентная ставка; M — денежная масса; G — государственные расходы; t — текущий период; t –1 — предыдущий период.

Вариант 4

Модель Кейнса (одна из версий):

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11}Y_t + b_{12}Y_{t-1} + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{21}Y_t + \varepsilon_2, \\ Y_t = C_t + I_t + G_t, \end{cases}$$

где C — потребление; Y — ВВП; I — валовые инвестиции; G — государственные расходы; t — текущий период; t – 1 — предыдущий период.

Вариант 5

Модель денежного и товарного рынков:

$$\begin{cases} R_t = a_1 + b_{12}Y_t + b_{14}M_t + \varepsilon_1, \\ Y_t = a_2 + b_{21}R_t + b_{23}I_t + b_{25}G_t + \varepsilon_2, \\ I_t = a_3 + b_{31}R_t + \varepsilon_3, \end{cases}$$

где R — процентные ставки; Y — реальный ВВП; M — денежная масса; I — внутренние инвестиции; G — реальные государственные расходы.

Вариант 6

Модифицированная модель Кейнса:

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11}Y_t + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{21}Y_t + b_{22}Y_{t-1} + \varepsilon_2, \\ Y_t = C_t + I_t + G_t, \end{cases}$$

где C — потребление; Y — доход; I — инвестиции; G — государственные расходы; t — текущий период; $t-1$ — предыдущий период.

Вариант 7

Макроэкономическая модель:

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11} D_t + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{22} Y_t + b_{23} Y_{t-1} + \varepsilon_2, \\ Y_t = D_t + T_t, \\ D_t = C_t + I_t + G_t, \end{cases}$$

где C — расходы на потребление; Y — чистый национальный продукт; D — чистый национальный доход; I — инвестиции; T — косвенные налоги; G — государственные расходы; t — текущий период; $t-1$ — предыдущий период.

Вариант 8

Гипотетическая модель экономики:

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11} Y_t + b_{12} J_t + \varepsilon_1, \\ J_t = a_2 + b_{21} Y_{t-1} + \varepsilon_2, \\ T_t = a_3 + b_{31} Y_t + \varepsilon_3, \\ Y_t = C_t + J_t + G_t, \end{cases}$$

где C — совокупное потребление в период t; Y — совокупный доход в период t; J — инвестиции в период t; T — налоги в период t; G — государственные доходы в период t.

Вариант 9

Модель денежного рынка:

$$\begin{cases} R_t = a_1 + b_{11} M_t + b_{12} Y_t + +\varepsilon_1, \\ Y_t = a_2 + b_{21} R_t + b_{22} I_t + \varepsilon_2, \\ I_t = a_3 + b_{33} R_t + \varepsilon_3, \end{cases}$$

где R — процентные ставки; Y — ВВП; M — денежная масса; I — внутренние инвестиции.

Вариант 10

Конъюнктурная модель имеет вид:

$$\begin{cases} C_t = a_1 + b_{11}Y_t + b_{12}C_{t-1} + \varepsilon_1, \\ I_t = a_2 + b_{21}r_t + b_{22}I_{t-1} + \varepsilon_2, \\ r_t = a_3 + b_{31}Y_t + b_{32}M_t + \varepsilon_3, \\ Y_t = C_t + I_t + G_t, \end{cases}$$

где C — расходы на потребление; Y — ВВП; I — инвестиции; r — процентная ставка; M — денежная масса; G — государственные расходы; t — текущий период; $t - 1$ — предыдущий период.

Тема А.3. Автокорреляция уровней временного ряда

Пример решения типовой задачи смотри в **разделе 6**.

Задача 3. Задана таблица значений. Задание: 1) рассчитать коэффициенты автокорреляции 1-го и 2-го порядков; 2) найти автокорреляционную функцию ряда, выявить структуру, построить таблицы, графики.

Варианты 1, 2

t	y_t	t	y_t
1	5,8	9	7,9
2	4,5	10	5,5
3	5,1	11	6,3
4	9,1	12	10,8
5	7,0	13	9,0
6	5,0	14	6,5
7	6,0	15	7,0
8	10,1	16	11,1

Варианты 3, 4

t	y_t	t	y_t
1	5,5	9	8,0
2	4,6	10	5,6
3	5,0	11	6,4
4	9,2	12	10,9
5	7,1	13	9,1
6	5,1	14	6,4
7	5,9	15	7,2
8	10,0	16	11,0

Варианты 5, 6

t	y_t	t	y_t
1	5,3	9	8,2
2	4,7	10	5,5
3	5,2	11	6,5
4	9,1	12	11,0
5	7,0	13	8,9
6	5,0	14	6,5
7	6,0	15	7,3
8	10,1	16	11,2

Варианты 7, 8

t	y_t	t	y_t
1	5,5	9	8,3
2	4,8	10	5,4
3	5,1	11	6,4
4	9,0	12	10,9
5	7,1	13	9,0
6	4,9	14	6,6
7	6,1	15	7,5
8	10,0	16	11,2

Варианты 9, 10

t	y_t	t	y_t
1	5,6	9	8,2
2	4,7	10	5,6
3	5,2	11	6,4
4	9,1	12	10,8
5	7,0	13	9,1
6	5,1	14	6,7
7	6,0	15	7,5
8	10,2	16	11,3

МАТЕМАТИКО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Е.1. Таблица значений F-критерия Фишера при уровне значимости $\alpha = 0,05$

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
1	161,5	199,5	215,7	224,6	230,2	233,9	238,9	243,9	249,0	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,83	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,76	1,48

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,74	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,67	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,65	1,31
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,64	1,28
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,63	1,26
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,60	1,21
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,82	1,59	1,18
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,80	1,57	1,14
300	3,87	3,03	2,64	2,41	2,25	2,13	1,97	1,79	1,55	1,10
400	3,86	3,02	2,63	2,40	2,24	2,12	1,96	1,78	1,54	1,07
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	1,96	1,77	1,54	1,06
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	1,95	1,76	1,53	1,03
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1

E.2. Критические значения t-критерия Стьюдента при уровне значимости 0,10; 0,05; 0,01 (двухсторонний)

Число степеней свободы d.f.	α			Число степеней свободы d.f.	α		
	00,10	0,05	0,01		00,10	0,05	0,01
1	6,3138	12,706	63,657	18	1,7341	2,1009	2,8784
2	2,9200	4,3027	9,9248	19	1,7291	2,0930	2,8609
3	2,3534	3,1825	5,8409	20	1,7247	2,0860	2,8453
4	2,1318	2,7764	4,5041	21	1,7207	2,0796	2,8314
5	2,0150	2,5706	4,0321	22	1,7171	2,0739	2,8188
6	1,9432	2,4469	3,7074	23	1,7139	2,0687	2,8073
7	1,8946	2,3646	3,4995	24	1,7109	2,0639	2,7969
8	1,8595	2,3060	3,3554	25	1,7081	2,0595	2,7874
9	1,8331	2,2622	3,2498	26	1,7056	2,0555	2,7787
10	1,8125	2,2281	3,1693	27	1,7033	2,0518	2,7707
11	1,7959	2,2010	3,1058	28	1,7011	2,0484	2,7633
12	1,7823	2,1788	3,0545	29	1,6991	2,0452	2,7564
13	1,7709	2,1604	3,0123	30	1,6973	2,0423	2,7500
14	1,7613	2,1448	2,9768	40	1,6839	2,0211	2,7045
15	1,7530	2,1315	2,9467	60	1,6707	2,0003	2,6603
16	1,7459	2,1199	2,9208	120	1,6577	1,9799	2,6174
17	1,7396	2,1098	2,8982	∞	1,6449	1,9600	2,5758

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балдин, К.В. Эконометрика : учеб. пособие для вузов / К.В. Балдин, О.Ф. Быстров, М.М. Соколов. — М. : ЮНИТИ–ДАНА, 2004. — 254 с.
2. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / В.Е. Гмурман. — М. : Высш. шк., 2002. — 479 с.
3. Доугерти, К. Введение в эконометрику / К. Доугерти; пер. с англ. — М. : ИНФРА-М, 1999. — 402 с.
4. Катышев, П.К. Сборник задач к начальному курсу эконометрики / П.К. Катышев, Я.Р. Магнус, А.А. Пересецкий. — М. : Дело, 2002. — 208 с.
5. Кремер, Н.Ш. Эконометрика : учебник для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко. — М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2002. — 311 с.
6. Кулинич, Е.И. Эконометрия / Е.И. Кулинич. —– М. : Финансы и статистика, 2001. — 304 с.
7. Магнус, Я.Р. Эконометрика. Начальный курс : учебник / Я.Р. Магнус, П.К. Катышев, А.А. Пересецкий. — М. : Дело, 2001. — 400 с.
8. Мардас, А.Н. Эконометрика / А.Н. Мардас. — СПб. : Питер, 2001. — 144 с.
9. Орлов, А.И. Эконометрика : учеб. пособие для вузов / А.И. Орлов. — М. : Экзамен, 2002. — 576 с.
10. Орлова, И.В. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование : учеб. пособие / И.В. Орлова, В.А. Половников. — М. : Вузовский учебник, 2007.
11. Практикум по эконометрике: учебн. пособие / под ред. И.И. Елисеевой. – М. : Финансы и статистика, 2003. — 192 с.
12. Прикладная статистика. Основы эконометрики : учебник для вузов : В 2 т. — Т. 1. Айвазян, С.А. Теория вероятностей и прикладная статистика / С.А. Айвазян, В.С. Мхитарян. — М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2001. — 656 с.
13. Прикладная статистика. Основы эконометрики : учебник для вузов: В 2 т. — Т. 2. Айвазян, С.А. Основы эконометрики / С.А. Айвазян. — М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2001. — 432 с.
14. Сборник задач по эконометрике : учеб. пособие для студентов экономических вузов / сост. Е.Ю. Дорохина, Л.Ф. Преснякова, Н.П. Тихомиров. — М. : Экзамен, 2003. — 224 с.
15. Тихомиров, Н.П. Эконометрика : учебник / Н.П. Тихомиров, Е.Ю. Дорохина. — М. : Экзамен, 2003. — 512 с.
16. Шалабанов, А.К. Эконометрика: учебно-методическое пособие / А.К. Шалабанов, Д.А. Роганов. — Казань : ТИСБИ, 2002. — 56 с.
17. Эконометрика: учебник / под ред. И.И.Елисеевой. — 2-е изд.; перераб. и доп. — М. : Финансы и статистика, 2005. — 576 с.

Содержание

Учебное издание

Гильмутдинов Риф Забирович
Гузаирова Гузель Ринатовна

ЭКОНОМЕТРИКА

Учебно-методическое пособие
для студентов направлений прикладной информатики
и финансово-экономических специальностей

Сдано набор 25.05.2015. Подписано в печать 19.06.2015.
Бумага офсетная. Печать ризографическая.
Усл. печ. л. 5,81. Уч.-изд. л. 6,36.
Тираж 150. Заказ 160

Башкирский институт социальных технологий (филиал)
Образовательного учреждения профсоюзов высшего образования
«Академия труда и социальных отношений» (г. Уфа)
450054, г. Уфа, просп. Октября, 74/2.
www: ufabist.ru

Отпечатано в типографии БИСТ (филиала) ОУП ВО «АТиСО»