БАШКИРСКИЙ ИНСТИТУТ СОЦИАЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ФИЛИАЛ)
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ПРОФСОЮЗОВ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«АКАДЕМИЯ ТРУДА И СОЦИАЛЬНЫХ ОТНОШЕНИЙ»

Р.З. Гильмутдинов, Г.Р. Гузаирова

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ

Учебно-методическое пособие

*для студентов направлений прикладной информатики
и финансово-экономических специальностей*

Уфа — 2015

УДК 330.4
ББК 22.1
Г47

Гильмутдинов, Р.З.

Г47 Исследование операций в экономике: учебно-методическое пособие для студентов финансово-экономических направлений и специальностей / Р.З. Гильмутдинов, Г.Р. Гузаирова; БИСТ (филиал) ОУП ВО «АТиСО». — Уфа: Изд-во Башкирского института социальных технологий (филиала) Образовательного учреждения профсоюзов высшего образования «Академия труда и социальных отношений, 2015. — 88 с.

ISBN 978-5-904354-64-0

Учебное пособие разработано в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования для студентов финансово-экономических специальностей и направлений и направлений прикладной информатики.

Предложенные темы входят в курс «Исследование операций в экономике». Рассмотрены основные положения исследования экономических функций методами дифференциального исчисления, изучена на этой основе оптимизация различных экономических функций. Уделено внимание эластичности производственных функций. Достаточно подробно изложены основы линейного программирования. Отдельные разделы могут быть полезны аспирантам и преподавателям.

Рецензенты:

Сафин Рашит Рафаилович, доктор технических наук,
заведующий кафедрой математики и математического моделирования
Уфимского государственного университета экономики и сервиса;

Быстров Александр Ильич, кандидат технических наук, доцент
кафедры «Экономика, информатика и аудит»
Башкирского института социальных технологий (филиала)
Образовательного учреждения профсоюзов высшего образования
«Академия труда и социальных отношений» (г. Уфа)

УДК 330.4
ББК 22.1

ISBN 978-5-904354-64-0

ГЛАВА 1. ЭКОНОМИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ, ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

На основании экономического смысла производной и аппарата дифференциального исчисления возникает множество экономических задач, связанных с исследованием функций. В частности, представляют интерес экономические понятия и задачи на предельную производительность ресурса, предельный спрос продукции от цены и др.

1.1. Производительность труда

Поясним простейший экономический смысл производной производственной функции. Предположим, что $u = u(t)$ — это количество произведенной продукции u за время t. Найдем производительность труда в момент времени t_0.

Применим классические обозначения дифференциального исчисления: в период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ количество произведенной продукции изменится от значения $u_0 = u(t_0)$ до значения $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$. Тогда средняя производительность труда за этот период времени равна $\dfrac{\Delta u}{\Delta t}$. **Производительность труда в момент времени** t_0 определим как предельное значение средней производительности за период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$:

$$u' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}.$$

Отсюда получаем **экономический смысл производной**: производительность труда есть производная объема произведенной продукции по времени.

Производную логарифмической функции $(\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$ назовем **относительной скоростью изменения функции** или **темпом изменения функции**.

Пример 1. Объем продукции u, произведенной бригадой рабочих, может быть описан уравнением $u = -\dfrac{5}{6}t^3 + \dfrac{15}{2}t^2 + 100t + 50$, $1 \le t \le 8$, где t — рабочее время в часах. Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения через час после начала работы и за час до ее окончания.

Производительность труда выражается производной

$$u'(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100,$$

а скорость и темп изменения производительности — соответственно производной $z'(t)$ и логарифмической производной $[\ln z(t)]'$:

$$z'(t) = -5t + 15 \left(\text{ед./ч}^2\right),$$

$$[\ln z(t)]' = \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{-5t+15}{-\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100} = \frac{2t-6}{t^2 - 6t - 40} \left(ед./ч\right).$$

В заданные моменты времени $t_1 = 1 \, и \, t_2 = 8 - 1 = 7$ соответственно имеем: $z(1) = 112{,}5 \left(ед./ч\right)$, $z'(1) = 10 \left(ед./ч^2\right)$, $T_z(1) = 0{,}09 \left(ед./ч\right)$ и $z(7) = 82{,}5 \left(ед./ч\right)$, $z'(7) = -20 \left(ед.ч^2\right)$, $T_z(7) = -0{,}24 \left(ед.ч\right)$.

Итак, к концу работы производительность труда существенно снижается; при этом изменение знака $z'(t)$ и логарифмической производной с плюса на минус свидетельствует о том, что увеличение производительности труда в первые часы рабочего дня сменяется ее снижением в последние часы.

1.2. Предельные издержки

Обозначим через x объем производства некоторой продукции, через K — суммарные затраты или издержки производства. Производственная функция (функция затрат) описывает зависимость издержек производства K от объема x выпускаемой продукции:

$$K = f(x).$$

Если объем производства увеличится на Δx единиц, то затраты возрастут на $\Delta K = f(x + \Delta x) - f(x)$ единиц.

Среднее приращение издержек выражается отношением $\frac{\Delta K}{\Delta x}$.

Под **предельными издержками** производства понимают предел среднего приращения издержек при безграничном уменьшении Δx, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to \infty} \frac{\Delta K}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1.1}$$

Предел (1.1) выражает дополнительные затраты на производство продукции при увеличении объема производства на малую единицу, если исходный объем производства составляет x единиц.

Экономический смысл производной в данной точке: производная выражает **предельные издержки** производства при данном объеме и характеризует приблизительно дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции.

Пример 2. Допустим, функция затрат имеет вид:

$$K = 2x + \ln(x+1).$$

Определим предельные издержки производства при данном объеме выпуска $x_1 = 2$, $x_2 = 9$.

Решение. $K'(x) = 2 + \dfrac{1}{x+1}$, тогда $K'(2) = 2\dfrac{1}{3}, K'(9) = 2{,}1.$

Видим, что $K'(9) < K'(2)$ и, вообще, $K'(x_2) < K'(x_1)$, если $x_2 > x_1$. То есть с увеличением объема производства предельные издержки (дополнительные затраты на следующую за x-й малую единицу выпуска) убывают.

Увеличение выпуска на малую единицу требует все меньших дополнительных затрат.

1.2. Предельная производительность ресурса, предельный спрос

Пусть в производстве продукции используется несколько видов сырья. Однако затраты всех ресурсов строго регламентированы технологией производства. Только один ресурс (например, затраты труда) может изменяться, оказывая влияние на объем производства. Зависимость выпуска продукции x от затрат этого специфического ресурса r описывается формулой $x = f(r)$.

Скорость изменения этой функции выражается ее производной и называется **предельной производительностью ресурса**. Если речь идет о затратах труда, то $f'(r)$ — производительность труда. Значение $f'(r)$ меняется в зависимости от r, т. е. речь идет о новой функции аргумента, а именно о

$$V = f'(r).$$

Естественно, возникает вопрос: какова скорость изменения V? Скорость изменения любой функции описывается ее производной.

Если функция $V = f'(r)$ дифференцируема, то существует

$$V' = (f'(r))'.$$

Скорость изменения предельной производительности ресурса называется **темпом изменения выпуска при изменении затрат этого ресурса.**

Аналогично определяется **предельный спрос и темп изменения спроса от цены** $d''(p)$, где d — спрос на продукцию, p — цена продукции.

Пример 3. Предприятие производит x единиц некоторой однородной продукции в месяц. Исследовать финансовые накопления, если зависимость финансовых накоплений предприятия от объема выпуска выражается формулой

$$F = -0{,}02x^3 + 600x - 1000 .$$

1. Из экономического смысла независимой переменной следует, что она неотрицательна. Итак,

$$D_F = (0, \infty).$$

2. $F' = -0{,}06x^2 + 600$. $F' = 0$ при $x = -100$ и $x = 100$. На промежутке (0, 100) производная положительна, на (100, ∞) — отрицательна. В точке $x = 100$ функция достигает максимума:

$$F_{\max} = F(100) = 39\ 000.$$

Вывод: финансовые накопления предприятия растут с увеличением объема производства до 100 единиц, при $x = 100$ они достигают максимума, равного 39 000 ден. ед., дальнейший рост производства приводит к сокращению финансовых накоплений.

Пример 4. Цементный завод производит x тонн цемента в день. По договору он должен ежедневно поставлять строительной фирме не менее 20 т цемента. Производительные мощности завода таковы. Что выпуск цемента не может превышать 90 т в день. Определить, при каком объеме производства удельные затраты будут наибольшими (наименьшими), если функция затрат имеет вид:

$$K = -x^3 + 98x^2 + 200x .$$

Удельные затраты это средние затраты на единицу продукции, в данном случае на 1 т цемента. При объеме производства в x т удельные затраты составят:

$$\frac{K}{x} = -x^2 + 98x + 200 .$$

Задача сводится к отысканию наибольшего, наименьшего значения функции

$$y = -x^2 + 98x + 200$$

на промежутке [20, 90].

Ответ: $\max\limits_{[20,\,90]} \dfrac{K}{x} = f(49) = 2601; \min\limits_{[20,\,90]} \dfrac{K}{x} = f(90) = 320.$

Пример 5. Требуется оградить забором прямоугольный участок земли площадью 294 кв. м и затем разделить его на две равные части перегородкой. Каковы должны быть размеры участка, чтобы на постройку забора и перегородки было истрачено наименьшее количество материала?

Указание**.** Обозначим ширину прямоугольного участка через x, а длину через y.

Из условий задачи следует, что $x \in (0, +\infty)$.

Поскольку площадь участка равна 294 м^2, то

$$x \cdot y = S = 294.$$

Откуда получаем, что $y = 294/x,$ а общая длина P всего загона равна

$$P(x) = 3x + 2y = 3x + 2 \cdot 294/x.$$

Таким образом, общая длина ограды представляет собой функцию от одной переменной x, и наша задача свелась к нахождению наименьшего значения этой функции в интервале $(0, +\infty)$.

Ответ: $x = 14$ м, $y = 21$ м.

Пример 6. Если формула $d = \dfrac{100}{p+1}$ выражает зависимость спроса на товар от цены на него, то $d' = -\dfrac{100}{(p+1)^2}$ — скорость изменения спроса, или **предельный спрос**.

Спрос является убывающей функцией цены, т. к. $d' < 0$ при любом значении p. **Темп изменения спроса** $d'' = \dfrac{200}{(p+1)^3} > 0$.

Другими словами, спрос убывает с нарастающей скоростью. Чем больше цена, тем быстрее уменьшается спрос на товар. Если $p_2 > p_1$, то $d'(p_2) > d'(p_1)$.

Определение. Монотонная функция f возрастает (убывает) на $[a, b]$ все быстрее, если скорость ее изменения является возрастающей функцией. Если же скорость изменения функции f убывает на $[a, b]$, то говорят, что функция **возрастает (убывает)** на $[a, b]$ **все медленнее**.

Очевидна, справедлива следующая **теорема.**

Для того, чтобы функция $y = f(x)$, имеющая на промежутке $[a, b]$ первую и вторую производные, возрастала на нем все быстрее, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ для всех $x \in [a, b]$.

Пример 7. Предположим, что на предприятии издержки производства вычисляются по формуле

$$K = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 80x + 300.$$

Предельные издержки $K' = x^2 - 10x + 80$ положительны при любом объеме производства x. Это следует из того, что дискриминант квадратного трехчлена $x^2 - 10x + 80$ отрицателен, а старший коэффициент 1 положителен. Такой трехчлен может принимать только положительные значения.

Вычислим $K'' = 2x - 10$. Легко установить, что $K'' > 0$, если $x > 5$, и $K'' < 0$ при $x < 0$. Следовательно, если выпуск продукции не превышает 5 усл. ед., то издержки производства возрастают все медленнее. Если же $x > 5$, то издержки растут все быстрее.

Задания для самостоятельной работы

1. Объем выпущенной заводом продукции x и выручка z, полученная от ее реализации, связаны следующей зависимостью:

$$z = 10x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{15}x^3.$$

Найдите предельную выручку и постройте ее график. Пользуясь этим графиком, определите, при каком объеме производства выручка максимальна (минимальна). Чему равна при этом предельная выручка? Что это означает?

2. Предприятие производит x единиц продукции в месяц и реализует ее по цене

$$P = 25 - \frac{1}{30}x.$$

Суммарные издержки производства составляют:

$$K = \frac{1}{25}x^2 + 5x + 300.$$

Определите, при каком объеме производства прибыль предприятия будет максимальной.

3. Из треугольных обрезков фанеры необходимо сделать заготовки, имеющие форму параллелограмма. Как добиться того, чтобы заготовки имели максимально возможную площадь?

4. Имеется запас меда стоимостью в C рублей. Известно, что с течением времени стоимость меда повышается по закону $V = Ce^{\sqrt{t}/2}$, а затраты на хранение настолько меньше V, что ими можно пренебречь. С другой стороны, если мед продать, а деньги положить в банк, то на вырученную сумму непрерывно будут начисляться 10 % годовых. То есть сумма V_0, положенная в банк в момент времени $t = 0$, через t лет станет равной

$$V_1 = V_0 e^{t/10} \ (10\ \% = \frac{1}{10}).$$

Определите момент времени t_0, в который наиболее выгодно продать имеющийся запас меда и положить деньги в банк, чтобы через t лет сумма, накапливаемая на счете, была максимальной.

5. Зависимость полных издержек производства K от объема производства x выражается с помощью формулы:

$$K = x^3 - 4x^2 + 9x.$$

Рассчитайте, при каком объеме производства средние издержки минимальны ($K_{ср} = \frac{K}{x}$).

6. Цена бриллианта пропорциональна квадрату его массы. Если бриллиант разбить на две части, то в каком случае общая стоимость двух частей будет наименьшей?

7. Предположим, что функция затрат имеет вид: $y = 2x + \ln(x + 1)$.

Определите предельные издержки производства при объеме выпуска $x_1 = 2$, $x_2 = 9$. При каких значениях x данная функция возрастает (убывает) все быстрее)?

8. Установлено, что предложение данного товара описывается формулой $s = e^p - 1$, где p — цена. Установите вид зависимости предельного предложения (скорости изменения предложения) и темпа изменения предложения от цены на товар. Как изменение этих параметров характеризует динамику предложения?

9. Функция спроса на товар имеет вид:

$$d = =80 + 16p - p^2.$$

Определите уровни цен, соответствующих максимальному спросу на товар, исчезновению спроса на него. При какой цене предельный спрос (скорость изменения спроса) будет равен нулю, двум, десяти? Чему равен темп изменения спроса? Что это означает? Приведите примеры ситуаций, которые могут быть описаны с помощью функций указанного вида.

10. Зависимость спроса от цены выражается формулой:

а) $d(p) = 10 - 2p$;

б) $d(p) = \dfrac{100}{p+1}$;

в) $d(p) = 15 + 2p - p^2$.

Опишите динамику изменения спроса на товар и выручки от продажи этого товара, нарисуйте графики функций.

11. Формула $s = e^P - 1$ задает зависимость предложения s от цены p. Установите характер изменения предельного предложения. Сравните его с характером изменения темпа s. Какую форму имеет график функции предложения?

12. Найдите предельную производительность ресурса (скорость изменения функции), если функция выпуска имеет вид:

$$x = 20 + 8r - r^2,$$

а затраты ресурса составляют: 1) 2 усл. ед.; 2) 5 усл. ед.

Определите, начиная с какого момента увеличение затрат данного ресурса становится экономически невыгодным. Приведите примеры экономических ситуаций, которые могут быть описаны с помощью функций выпуска указанного вида.

13. Определите скорость изменения спроса (предельный спрос) при цене в 1 ден. ед.; 3 ден. ед.; 10 ден. ед., и объясните результаты, если зависимость спроса на товар от цены на него выражается формулой

$$d = 200 + \frac{p-1}{p^2+3}.$$

14. Объемы продукции рабочей бригады описывается уравнением

$$u = \frac{n}{6}t^3 + \frac{n+2}{4}t^2 + 5t + 50,\ 1 \le t \le 8,$$

где t — рабочее время в часах, n — натуральное число.

Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения через 2 часа после начала работы и за 1 час до ее окончания.

15. Задана зависимость спроса на товар от цены:

$$d(p) = \frac{n+50}{p+2},$$

где n — натуральное число.

Определить скорость, темп изменения спроса (предельный спрос) при цене в 1 ден. ед.; 3 ден. ед.; 10 ден. ед. Сравните и объясните результаты.

16. Найдите предельную производительность ресурса r, если функция выпуска $x(r)$ имеет вид

$$x = -(r - n - 1)^2 + n,$$

где n — натуральное число, а затраты ресурса составляют: 1 усл. ед.; 5 усл. ед.

17. Функция затрат в зависимости от объема выпуска имеет вид:

$$y = (n+1)x + \ln(x + n + 1),$$

где n — натуральное число.

Определить предельные издержки производства при объеме выпуска: $x = 1$, $x = 4$. При каких значениях x функция возрастает (убывает) все быстрее?

ГЛАВА 2. ЭЛАСТИЧНОСТЬ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

2.1. Определение эластичности, ее свойства. Эластичности элементарных функций

Изучение различных экономических вопросов приводит к необходимости выяснения — на сколько процентов изменится одна величина, если другая увеличилась на 1 %.Такие вопросы актуальны, например, при принятии управленческих решений, при решении стратегических вопросов в экономике. Эти вопросы приводят к понятию эластичности производственных функций. Эластичность изучается при определении динамики спроса населения на данный товар, при изменении его цены или при изменении доходов населения, при исследовании диапазона взаимозаменяемости ресурсов производства, при определении эффективности тех или иных затрат, при прогнозировании изменения прибыли предприятия или фирмы под воздействием различных факторов, а также при решении многих других проблем.

Пусть аргумент x функции $f(x)$ получит приращение Δx. Тогда приращение функции имеет вид

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{2.1}$$

Составим относительные приращения переменных

$$\frac{\Delta x}{x}, \frac{\Delta y}{y}$$

и выразим их в процентах. Величина $\frac{\Delta x}{x} \cdot 100\ \%$ указывает, на сколько процентов изменилось значение аргумента, а $\frac{\Delta y}{y} \cdot 100\ \%$ дает соответствующее изменение значения функции.

Отношение

$$\left(\frac{\Delta y}{y} \cdot 100\%\right) : \left(\frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%\right) \tag{2.2}$$

показывает, на сколько процентов в среднем меняется (увеличивается или уменьшается) значение функции, когда значение аргумента возрастает на 1 %, то есть увеличивается от x до x + 0,001x.

Это отношение будет характеризовать поведение функции $y = f(x)$ в данной точке тем точнее, чем меньше Δx. Вычислим предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\left(\frac{\Delta y}{y}\cdot 100\%\right):\left(\frac{\Delta x}{x}\cdot 100\%\right)\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{x}{y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (2.3)$$

Определение. Предел (3) отношения относительного приращения функции $\frac{\Delta y}{y}$ к соответствующему относительному приращению аргумента $\frac{\Delta x}{x}$ при Δx, стремящемся к нулю, называется **эластичностью** функции $y = f(x)$ по переменной x:

$$E_x(y)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{x}{y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (2.4)$$

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$ и формула (2.4) принимает вид

$$E_x(y)=\frac{x}{y}f'(x)$$

или

$$E_x(y)=\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}. \qquad (2.5)$$

Формулу (2.5) можно переписать в виде

$$E_x(y)=\frac{dy}{dx}:\frac{y}{x}.$$

Получаем еще один смысл эластичности, она равна отношению предельной производительности ресурса к его средней производительности.

Пример 1. $f(x)=3x+4.$

Эластичность данной функции вычисляется по формуле

$$E_x(f(x))=\frac{x}{f(x)}\cdot f'(x)=\frac{x}{3x+4}\cdot 3=\frac{3x}{3x+4}.$$

При x =2 показатель эластичности равен 0,6. Это означает, что при увеличении x с 2 до 2,02 значение функции возрастает примерно на 0,6 %. Если $x = 0$, то $E_x(f(x)) = 0$. Следовательно, увеличение x с 0 до 0,01 практически не меняет значения функции.

Пример 2. $y = 1 + 2x - x^2$

Здесь $E_x(f(x)) = \dfrac{x}{1+2x-x^2}\cdot(2-2x) = \dfrac{2x(1-x)}{1+2x-x^2}$.

При $x = 1$ эластичность равна нулю. При увеличении с 1 до 1,01 значении функции практически не меняется. Если $x = 2$, то $E_x(y) = -4$. Увеличение значения x с 2 до 2,02 приводит к уменьшению значения функции на 4 %.

Свойства эластичности

1. Эластичность — безразмерная величина, значение которой не зависит от того, в каких единицах измерены величины y и x, т. е. $E_{ax}(by) = E_x(y)$:

$$E_{ax}(by) = \frac{d(by)}{d(ax)}\cdot\frac{ax}{by} = \frac{b(dy)}{a(dx)}\cdot\frac{ax}{by} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{x}{y} = E_x(y).$$

2. Эластичности взаимно обратных функций — взаимно обратные величины:

$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)} \Leftarrow E_x(y) = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}\cdot\frac{y}{x}} = \frac{1}{E_y(x)}.$$

3. Эластичность произведения двух функций $u(x)$ и $v(x)$, зависящих от одного и того же аргумента x равна сумме эластичностей:

$$E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v).$$

$$E_x(uv) = \frac{d(uv)}{dx}\cdot\frac{x}{uv} = \frac{v\left(\frac{du}{dx}\right) + u\left(\frac{dv}{dx}\right)}{uv}\cdot x = \frac{du}{dx}\cdot\frac{x}{u} + \frac{dv}{dx}\cdot\frac{x}{v} = E_x(u) + E_x(v).$$

4. Эластичность частного двух функций $u(x)$ и $v(x)$, зависящих от одного и того же аргумента x, равна разности эластичностей:

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{d\frac{u}{v}}{dx}\cdot\frac{x}{\frac{u}{v}} = \frac{vdu - udv}{v^2}\cdot\frac{xv}{u} = \frac{du}{dx}\cdot\frac{x}{u} - \frac{dv}{dx}\cdot\frac{x}{v} = E_x(u) - E_x(v).$$

5. Эластичность суммы двух функций $u(x)$ и $v(x)$ дает следующую формулу:

$$E_x(u+v) = \frac{d(u+v)}{dx}\cdot\frac{x}{u+v} = \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\right)\cdot\frac{x}{u+v} = \frac{uE_x(u) + vE_x(v)}{u+v}.$$

Эластичности элементарных функций

1. Эластичность степенной функции $y = x^\alpha$ равна $E_x(x^\alpha) = \alpha$:

$$E_x\left(x^\alpha\right) = \frac{dx^\alpha}{dx} \cdot \frac{x}{x^\alpha} = \frac{\alpha x^{\alpha-1} \cdot x}{x^\alpha} = \alpha.$$

2. Эластичность показательной функции $y = a^x$ равна

$$E_x\left(a^x\right) = x\ln(a).$$

$$E_x\left(a^x\right) = \frac{da^x}{dx} \cdot \frac{x}{a^x} = a^x \cdot x \cdot \frac{\ln a}{a^x} = x \cdot \ln a.$$

3. Эластичность линейной функции $y = ax + b$ имеет вид:

$$E_x(ax+b) = \frac{d(ax+b)}{dx} \cdot \frac{x}{ax+b} = \frac{ax}{ax+b}.$$

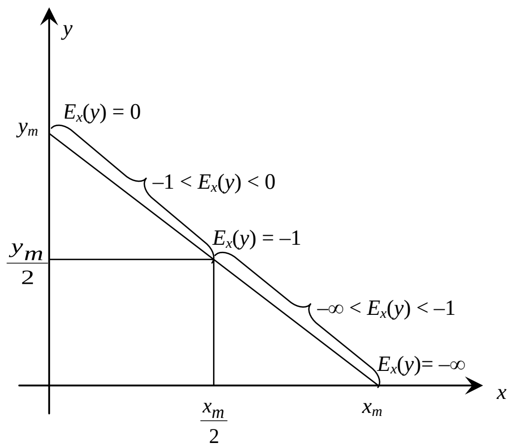


Рисунок 1 — Эластичность линейной функции

Если линейная функция имеет угловой коэффициент $a < 0$, то эластичность функции имеет вид, представленный на рисунке 1. Эластичность меняется от 0 (точка y_m — пересечение графиком оси y) до $-\infty$ в точке пересечения оси x, проходя через значение (–1) в средней точке.

Таким образом, хотя прямая имеет постоянный наклон, ее эластичность зависит не только от наклона, но и от того, в какой точке x мы ее находим.

Определение. Функция с бесконечной эластичностью во всех точках называется совершенно эластичной, с нулевой эластичностью во всех точках — совершенно неэластичной.

Задания для самостоятельной работы

Используя свойства эластичности, найти $E_x(f(x))$, если:

а) $f(x) = x^2 e^x$, б) $f(x) = 3x \ln x$, в) $f(x) = \dfrac{x^4}{5e^x}$,

г) $f(x) = 2 + 3x - x^2$, д) $f(x) = 2^x \ln x$, е) $f(x) = \dfrac{4a^x}{x^5}$.

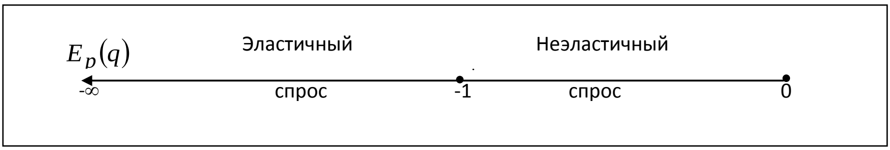
2.2. Виды эластичностей в экономике

Рассмотрим основные виды эластичностей.

1. *Эластичность спроса по цене (прямая)*

$$E_p(q) = \left(\frac{dq}{q}\right) \Big/ \left(\frac{dp}{p}\right) = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q},$$

показывающая относительное изменение (выраженное в процентах) величины спроса на какое-либо благо при изменении цены этого блага на один процент и характеризующая чувствительность потребителей к изменению цен на продукцию. Если ценовая эластичность спроса по абсолютной величине больше единицы, то спрос называют эластичным (совершенно эластичным при бесконечно большой величине эластичного спроса). Если ценовая эластичность спроса по абсолютной величине меньше единицы, то спрос называют неэластичным (совершенно неэластичным при нулевой эластичности спроса).



И, наконец, если ценовая эластичность спроса по абсолютной величине равна единице, то говорят о спросе с единичной эластичностью.

2. *Эластичность спроса по доходу*

$$E_I(q) = \left(\frac{dq}{q}\right) \Big/ \left(\frac{dI}{I}\right) = \frac{dq}{dI} \cdot \frac{I}{q},$$

характеризующая относительное изменение (в процентах) величины спроса на какое-либо благо при изменении дохода потребителей этого блага на один процент. Положительная эластичность спроса по доходу характеризует нормальные (качественные) товары, а отрицательная величина — малоценные (некачественные) товары.

Так, высокий положительный коэффициент спроса по доходу в отрасли указывает, что ее вклад в экономический рост больше, чем доля в структуре экономики, и она имеет шансы на расширение и процветание в будущем. Наоборот, если коэффициент эластичности спроса на продукцию отрасли по доходу имеет небольшое положительное или отрицательное значение, то ее может ожидать застой и перспектива сокращения производства.

3. *Перекрестная эластичность спроса по цене*

$$E_{Pj}(q_i) = \left(\frac{dq_i}{q_i}\right) \Big/ \left(\frac{dp_j}{p_j}\right) = \frac{dq_i}{dp_j} \cdot \frac{p_i}{q_j},$$

характеризующая относительное изменение (в процентах) величины спроса на одно благо при изменении цены на другое благо (замещающее или дополняющее его в потреблении) на один процент. Положительный знак перекрестной эластичности спроса по цене свидетельствует о замещаемости благ, а отрицательный — о дополняемости.

4. *Ценовая эластичность ресурсов*

$$E_{Pi}(R_i) = \left(\frac{dR_i}{R_i}\right) \Big/ \left(\frac{dp_i}{p_i}\right) = \frac{dR_i}{dp_i} \cdot \frac{p_i}{R_i},$$

характеризующая относительное изменение (в процентах) величины спроса на какой-нибудь ресурс (например, труд) при изменении цены этого ресурса (соответственно, заработной платы) на один процент.

5. *Эластичность замещения одного ресурса другим*

$$E_{Rj}(R_i) = \left(\frac{dR_i}{R_i}\right) \Big/ \left(\frac{dR_j}{R_j}\right) = \frac{dR_i}{dR_j} \cdot \frac{R_j}{R_i},$$

характеризующая необходимое изменение (в процентах) величины одного ресурса (например, капитала) при изменении количества другого ресурса (например, труда) на один процент с тем, чтобы выпуск при этом не изменился.

2.3. Эластичность спроса и предложения относительно цены

Изучается зависимость спроса d на товар от цены p на него.

Предположим, что цены на аналогичные товары, доходы потребителей и структура их потребностей — постоянные величины. Тогда зависимость спроса от цены можно описать с помощью функции $d = d(p)$.

Во многих экономических исследованиях необходимо установить не величину спроса при каждом конкретном уровне цены, а характер изменения спроса при определенном изменении цены. В этом случае находят эластичность спроса относительно цены. В наших обозначениях

$$E_p(d) = \frac{p}{d(p)} \cdot d'(p). \tag{2.6}$$

Эластичность спроса относительно цены определяет, на сколько процентов изменится спрос на товар, если цена на него увеличится на 1 %. Так как в большинстве случаев спрос является убывающей функцией цены и $d'(p) < 0$, то, чтобы избежать отрицательных чисел, в этих случаях при изучении эластичности принимают

$$\tilde{E}_p(d) = -\frac{p}{d(p)} \cdot d'(p). \tag{2.7}$$

Знак «–» показывает, что спрос уменьшается при увеличении цены.

Пример 3. Если функция спроса линейная: $d = 5 - \frac{1}{2}p$, то

$$\tilde{E}_p(d) = -\frac{p}{5-\frac{1}{2}p} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{p}{10-p}.$$

При $p = 2$ имеем $E_p(d) = \frac{1}{4}$. Это означает, что увеличении цены на 1 % спрос падает на $\frac{1}{4}$ %. При $p = 5$ показатель эластичности равен 1. Увеличение цены с 5 до 0,05 приводит к уменьшению спроса на 1 %. При p = 9 спрос уменьшается на 9 %.

Пример 4. Для $d = \frac{c}{p}$ (c — постоянная, c > 0) показатель эластичности равен 1 при любом уровне цены.

Действительно,

$$\tilde{E}_p(d) = -\frac{p}{\frac{c}{p}} \cdot \left(-\frac{c}{p^2}\right) = 1.$$

Если спрос обратно пропорционален цене, то при любой цене увеличение ее на 1 % влечет за собой уменьшение спроса также на 1 %.

Определение. Говорят, что спрос **эластичен**, если повышению цены на 1 % соответствует снижение спроса более чем на 1 %, т. е. $\tilde{E}_p(d) > 1$; спрос **нейтрален**, если $\tilde{E}_p(d) = 1$; спрос **неэластичен**, если $0 < \tilde{E}_p(d) < 1$.

В примере 19 спрос нейтрален при $p = 5$; при $p = 2$ — неэластичен и для $p = 9$ — эластичен. Для функции $d = \frac{c}{p}$ спрос нейтрален при любой цене.

Другими словами, спрос на товар эластичен, если небольшое изменение цены товара вызывает достаточно ощутимые изменения спроса на него. И если изменение цены ведет к сравнительно небольшому изменению величины спроса, то спрос является неэластичным. Примерами товаров с эластичным спросом могут служить, например, яблоки, помидоры, персики и т. п. При росте цен на них покупательский спрос может переключиться на другие виды овощей и фруктов. В то же время спрос будет неэластичным на товары первой необходимости (продукты питания, лекарства, электричество, газ) и на вещи, цена которых незначительна для семейного бюджета (карандаш, зубная паста, крем для обуви), а также на труднозаменяемые товары (электрические лампочки, хлеб, бензин). Понятно, что при рыночности экономики и конкуренции товаров спрос всегда будет эластичным, и наоборот, – при отсутствии конкуренции, т. е. монополии, спрос будет неэластичным. Также спрос может быть неэластичным при сговоре нескольких основных поставщиков товаров или услуг. Примером этого являются постоянно растущие цены на бензин, газ, цены на услуги основных сотовых операторов и пр. А примеры монополий — это поставки населению электричества, газа. Исследуем динамику *выручки* при различных видах спроса. Общие расходы населения на данный товар (выручка от его продажи) при цене p составляют $u = pd(p)$.

Предельная выручка равна

$$\frac{du}{dp} = d(p) + p \cdot d'(p),$$

или

$$\frac{du}{dp} = d(p)\left(1 + \frac{p}{d(p)} \cdot d'(p)\right) = d(p)(1 - E_p(d)).$$

Сделаем выводы:

а) если спрос эластичен, т. е. $E_p(d) > 1$, то $\frac{du}{dp} < 0$ и с повышением цены выручка от продажи снижается;

б) при нейтральном спросе ($E_p(d) = 1$) $\frac{du}{dp} = 0$, и выручка практически не зависит от цены (в этом случае $u = c$, c — постоянная и $d(p) = \frac{c}{p}$), следовательно, в случае нейтрального взноса его размер пропорционален цене;

в) при неэластичном спросе ($0 < E_p(d) < 1$)) выручка увеличивается с ростом цены, так как в этом случае $\frac{du}{dp} > 0$.

Из сказанного видно, что знание эластичности спроса на данный товар позволяет прогнозировать направление изменения суммы выручки под влиянием роста или снижения цены. Очевидно, каждой фирме выгодно, чтобы спрос на ее продукцию был как можно более эластичным, ибо в такой ситуации существует возможность назначать сравнительно высокие цены.

Значит, фирма должна прилагать все усилия к поддержанию спроса на ее товар на достаточно высоком уровне. Достижению этой цели при рыночной экономике способствуют хорошее качество продукции, четко организованное обслуживание потребителей, высокое качество рекламы.

Пример 5. Известно, что эластичность спроса на товар составляет 0,4. Определим, как изменится доход от реализации товара, если цену на него увеличить на 5 %.

При эластичности $E_p(d) = 4$ увеличение цены на 1 % вызывает уменьшение спроса на 0,4%. Увеличение цены на 5 % способствует уменьшению спроса на $5 \cdot 0,4$ % = 2 %. Цена выросла на 5 % и стала равной 1,05 p, где p — старая цена. Если $d(p)$ — спрос, соответствующий цене p, то $0,98d(p)$ — величина спроса при цене $1,05p$.

Выручка от реализации товара по цене p составляла $pd(p)$ денежных единиц. После увеличения цены выручка возросла приблизительно на 3 %. При неэластичном спросе (0,4 < 1) увеличение цены приводит к возрастанию выручки.

Эластичность предложения определяется аналогично эластичности спроса:

$$E_p(s)=\lim_{\Delta p\to 0}\left(\left(\frac{\Delta s}{s}\cdot 100\%\right):\left(\frac{\Delta p}{p}\cdot 100\%\right)\right)=\frac{p}{s}\lim_{\Delta p\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta p}. \tag{2.8}$$

Для дифференцируемой функции $s = s(p)$ формула (5) принимает вид

$$E_p(s)=\frac{p}{s}\frac{ds}{dp} \tag{2.9}$$

или

$$E_p(s)=\frac{ds}{dp}:\frac{s}{p}. \tag{2.10}$$

В отличие от формулы (2.6), выражающей эластичность спроса, в (2.9) и (2.10) отсутствует знак «–». Это связано с тем, что с ростом рыночной цены на товар предложение этого товара обычно растет. Каждому предпринимателю выгодно реализовать свою продукцию по более высокой цене. Поэтому $s = s(p)$ — возрастающая функция и $\frac{ds}{dp}>0$.

Равенство (2.10) означает, что эластичность предложения равна отношению предельного предложения к среднему.

Предложение также может быть эластичным и неэластичным.

Определение. Предложение называется **эластичным,** если $E_p(s) > 1$, **неэластичным,** если $0 < E_p(s) < 1$, и **нейтральным**, если $E_p(s) = 1$.

Например, фирма решила пригласить на работу дополнительное количество разнорабочих и квалифицированных наладчиков для скорейшего ввода в строй новой автоматической линии. Чтобы увеличить предложение услуг, руководство фирмы объявило об увеличении заработной платы на 1000 рублей в месяц. Если в городе много малооплачиваемых трудящихся, то такая надбавка может оказаться для них существенной, и предложение услуг в качестве разнорабочего будет эластичным по цене. Однако едва ли много квалифицированных, а следовательно и высокооплачиваемых наладчиков согласиться сменить место работы из-за такой прибавки к зарплате. Здесь предложение услуг окажется неэластичным по цене.

Пример 6. Пусть зависимость предложения s от цены p описывается формулой $s = 0{,}05p^2 + p$.

а) $\frac{ds}{dp}=0{,}1p+1>0$, т. е. s — возрастающая функция цены;

б) $\dfrac{d^2s}{dp^2} = 0{,}1 > 0$ — функция вогнутая, темп изменения предложения постоянный;

в) $E_p(s) = \dfrac{(0.1p+1)p}{0.05p^2 + p} = \dfrac{0.1p+1}{0.05p+1} > 1$. Предложение эластично по цене.

Зависимость между спросом на товар и его ценой (а значит, и вид соответствующей кривой) в значительной степени определятся полезностью товара. На вид функции предложения в первую очередь оказывают влияние издержки производства.

Определение. Цена, при которой величина спроса равняется величине предложения, называется **равновесной (**или ценой равновесия).

В точке М величина спроса равна величине предложения, *p* — цена равновесия.

Пример 7. $d(p) = e^{-p^2}$ — функция спроса, $s(p) = e^{p^2-8}$ — функция предложения. Из уравнения $d(p) = s(p)$ найдем цену равновесия $e^{-p^2} = e^{p^2-8}$,

Отсюда $-p^2 = p^2 - 8$ или $2p^2 = 8$ и $p^2 = 4$.

Следовательно, цена равновесия $p = 2$.

Задания для самостоятельной работы

1. Спрос *d* и предложение *s* изменяются по следующим законам:

$$d = \frac{100}{2p+1},\ s = \frac{p^2}{2p+1}.$$

Найдите цену, при которой спрос совпадает с предложением (цену равновесия). Рассчитайте эластичность спроса при этой цене. Постройте графики спроса и предложения.

2. Формула $d(p) = e^{-p^2}$ выражает зависимость спроса от цены. Определите, при каких значениях *p* спрос эластичен, нейтрален, неэластичен. Как зависит выручка от изменения цены? Сопоставьте с критериями эластичности.

3. Функция спроса имеет вид $d = \dfrac{400}{p^2 - 4p + 8}$. Постройте график функции. Определите, при каких значениях *p* спрос эластичен, нейтрален, неэластичен.

4. Определите, на сколько процентов приблизительно изменится выручка от реализации товара. Если эластичность спроса равна α, а цена на товар увеличена на β %:

а) $\alpha = 0{,}2$; $\beta = 20$ %; б) $\alpha = 4$; $\beta = 5$ %; в) $\alpha = 1$; $\beta = 10$ %.

5. Используя свойства эластичности, найти $E_x(f(x))$, если:

а) $f(x) = x^2 e^x$, б) $f(x) = 3x \ln x$, в) $f(x) = \dfrac{x^4}{5e^x}$,

г) $f(x) = 2 + 3x - x^2$, д) $f(x) = 2^x \ln x$, е) $f(x) = \dfrac{4a^x}{x^5}$.

6. Функция спроса от цены имеет вид:

$$d(p) = \frac{400}{(p-n)^2 + n}.$$

Постройте график функции. Определите при каких значениях p спрос эластичен, нейтрален, неэластичен.

ГЛАВА 3. ИССЛЕДОВАНИЕ НА ЭКСТРЕМУМ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

3.1. Необходимые и достаточные условия существования безусловного экстремума

Задачи на экстремум имеют большое значение в экономике. Это вычисление, например, максимумов дохода, прибыли, минимума издержек в зависимости от нескольких переменных: ресурсов, производственных фондов и т. д. (примеры 1, 2). Теория нахождения экстремумов функций нескольких переменных излагается в основном курсе математики. Напомним основные моменты.

Частная производная функции $z = z(x, y)$ по аргументу, например, x является обыкновенной производной функции одной переменной x при фиксированном значении y.

Точка $M_0(x_0, y_0)$, в которой для дифференцируемой функции $z(x, y)$ выполняется условие (необходимое условие существования локального экстремума):

$$\begin{cases} z'_x(x_0, y_0) = 0 \\ z'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}, \tag{3.1}$$

называется стационарной (критической) точкой возможного экстремума.

Теорема (достаточное условие локального экстремума). Пусть в точке $M_0(x_0, y_0)$ и в некоторой ее окрестности все вторые частные производные функции $z(x, y)$ непрерывны. Тогда, если

$$\Delta = z''_{xx}(x_0, y_0) z''_{yy}(x_0, y_0) - [z''_{xy}(x_0, y_0)]^2 > 0, \tag{3.2}$$

то функция $z(x, y)$ имеет в точке M_0 локальный экстремум: минимум при $z''_{xx}(x_0;\ y_0) < 0$ и максимум при $z''_{xx}(x_0;\ y_0) > 0$. Если $\Delta \le 0$, то данная функция не имеет локального экстремума в точке M_0. Также дальше приводится задача на нахождение условного экстремума методом Лагранжа (пример 1).

Пример 1. Небольшая фирма производит два вида товаров G_1 и G_2 и продает их по цене 1000 и 800 соответственно. Функция затрат (издержек) имеет вид:

$$C = 2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2,$$

где Q_1 и Q_2 обозначают объемы выпуска соответственно товаров G_1 и G_2.

Требуется найти такие значения Q_1 и Q_2, при которых прибыль, получаемая фирмой, максимальна.

Решение. Поскольку фирма небольшая, она не может монопольно устанавливать цены и вынуждена ориентироваться на рыночные цены, которые не зависят от объемов производства Q_1 и Q_2 (эти объемы слишком малы). Поэтому суммарный доход от продажи товаров G_1 и G_2

$$R = 1000Q_1 + 800\,Q_2.$$

Прибыль π представляет собой разницу между доходом R и затратами C, поэтому

$$\pi = R - C = \left(1000Q_1 + 800Q_2\right) - \left(2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2\right),$$

или

$$\pi\left(Q_1, Q_2\right) = 1000Q_1 + 800Q_2 - 2Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - Q_2^2.$$

Эта и есть та самая функция двух переменных, максимум которой следует найти, т. е. решить задачу оптимизации.

Для того чтобы найти стационарные точки, вычисляем частные производные первого порядка

$$\pi'_{Q_1}\left(Q_1, Q_2\right) = 1000 - 4Q_1 - 2Q_2,$$
$$\pi'_{Q_2}\left(Q_1, Q_2\right) = 800 - 2Q_1 - 2Q_2$$

и приравниваем их к нулю, что дает систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} 1000 - 4Q_1 - 2Q_2 = 0, \\ 800 - 2Q_1 - 2Q_2 = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы и даст нам координаты стационарной точки. Вычитая из первого уравнения почленно второе, получаем

$$200 - 2Q_1 = 0,$$

или

$$Q_1 = 100.$$

Подставляя полученное значение в первое уравнение, находим $Q_2 = 300$.

Таким образом, стационарная точка имеет координаты (Q_1, Q_2) = (100, 300).

Остается выяснить вопрос: имеем ли мы в стационарной точке максимум, минимум или не имеем ни того, ни другого. Для решения вычисляем частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2} = -4; \qquad \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2} = -2; \qquad \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 Q_2} = -2$$

и оставляем выражение

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2}\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2} - \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 Q_2}\right)^2 = -4 \cdot (-2) - (-2)^2 = 4 > 0.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2} = -4 < 0; \qquad \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2} = -2 < 0\ .$$

Поэтому в стационарной точке имеет место максимум. Подставляя координаты стационарной точки в функцию прибыли

$$\pi(100,\ 300) = 1000 \cdot 100 + 800 \cdot 300 - 2 \cdot 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 300 - 300^2 = 170\,000\,.$$

Это и есть величина максимальной прибыли, которая достигается при объемах производства $Q_1 = 100$; $Q_2 = 300$, что завершает решение задачи.

Учитывая актуальность получения максимальной прибыли при любой предпринимательской деятельности, разберем следующую задачу.

Пример 2. Фирма реализует часть товара на внутреннем рынке, а другую часть поставляет на экспорт. Связь цены товара q_1 и его количества p_1, проданного на внутреннем рынке, описывается кривой спроса;

$$p_1 + q_1 = 500.$$

Аналогично для экспорта цена p_2 и количество q_2, также связаны соотношением (уравнением кривой спроса)

$$2p_2 + 3q_2 = 720.$$

Суммарные затраты даются выражением

$$C = 50\,000 + 20\,(q_1 + q_2).$$

Какую ценовую политику должна проводить фирма, чтобы прибыль была максимальна.

Решение. Прежде всего, необходимо определить доход фирмы, который складывается из двух частей: продаж на внутреннем рынке

$$R_1 = p_1 q_1 = (500 - q_1) q_1 = 500 q_1 - q_1^2$$

и экспортных поставок

$$R_2 = p_2 q_2 = (360 - 1{,}5 q_2) q_2 = 360 q_2 - 1{,}5 q_2^2$$

(в обоих случаях цена берется из соответствующих кривых спроса).

Поэтому суммарный доход

$$R = R_1 + R_2 = 500 q_1 - q_1^3 + 360 q_2 - 1{,}5 q_2^2 .$$

Теперь можно легко найти получаемую фирмой прибыль

$$\pi(q_1, q_2) = R - C = \left(500 q_1 - q_1^2 + 360 q_2 - 1{,}5 q_2^2\right) -$$
$$-\left(50\,000 + 20 q_1 + 20 q_2\right) = 480 q_1 - q_1^2 + 340 q_2 - 1{,}5 q_2^2 - 50\,000.$$

Эта функция двух переменных, нахождение максимума которой и решает задачу оптимизации.

Вычисляем частные производные первого порядка

$$\pi'_{q_1}(q_1, q_2) = 480 - 2q_1; \quad \pi'_{q_2}(q_1, q_2) = 340 - 3q_2 .$$

Приравнивая их к нулю, получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} 480 - 2q_1 = 0, \\ 340 - 3q_2 = 0. \end{cases}$$

В данном случае система решается тривиально

$$q_1 = 240; \quad q_2 = 340/3,$$

и мы получили координаты единственной стационарной точки.

Далее вычисляем частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial q_1^2} = -2 \langle 0; \qquad \frac{\partial^2 \pi}{\partial q_2^2} = -3 \langle 0; \qquad \frac{\partial^2 \pi}{\partial q_1 q_2} = 0$$

и проверяем знак выражения

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial q_1^2}\frac{\partial^2\pi}{\partial q_2^2}-\left(\frac{\partial^2\pi}{\partial q_1 q_2}\right)^2=-2\cdot(-3)-0^2=6>\ 0.$$

Отсюда заключаем, что в стационарной точке (240, 340/3) имеет место максимум.

Для того чтобы ответить на вопрос об оптимальной ценовой политике фирмы, подставляем координаты точки максимума в кривые спроса:

$$p_1=500-q_1=500-240=260,$$
$$p_2=360-1{,}5q_2=360-1{,}5\cdot 340/3=190.$$

Это и есть оптимальные цены для продажи на внутреннем рынке и по экспорту.

Нам осталось подсчитать максимальную прибыль при оптимальных объемах продаж на внутреннем и внешнем рынках. Подставляя полученные значения q_1 и q_2 (координаты стационарной точки) в функцию прибыли, легко находим эту прибыль

$$\pi(240{,}340/3)=480\cdot 240-240^2+340(340/3)-1{,}5(340/3)^2-50\,000=26\,866{,}67.$$

3.2. Условный экстремум. Метод Лагранжа

Задача следующая: найти экстремум функции $z = z(x, y)$ при условии

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{3.3}$$

Такой экстремум называется условным.

Пусть из условия $\varphi(x, y) = 0$ определяется функция $y = y(x)$, тогда $z = z(x; y(x))$ и задача экстремума сводится к функции одной переменной.

Учитывая, что не всегда $y(x)$ находится в явном виде, рассмотрим другой метод — метод Лагранжа.

Пусть $\varphi(x, y)$ — дифференцируемая функция, тогда

$$\varphi(x, y) = 0,\ [\varphi(x, y)]'_x = 0,$$

откуда

$$[\varphi(x, y)]'_x = \varphi'_x + \varphi'_y\cdot y'_x = 0.$$

С другой стороны из необходимого условия экстремума

$$[z(x(y))]'_x = z'_x + z'_y + y'_x = 0,\ y'_x = -z'_x : z'_y,$$

из последних равенств получаем параметр λ:

$$\varphi'_x : \varphi'_y = z'_x : z'_y\ ,\ \varphi'_x : z'_x = \varphi'_y : z'_y = -\lambda$$

Отсюда

$$z'_x. + \lambda\ \varphi'_x = 0,\ z'_y + \lambda\ \varphi'_y = 0$$

Поэтому их можем считать частными производными следующей функции:

$$F(x, y, \lambda) = z(x, y) + \lambda\varphi(x, y), \tag{3.4}$$

где λ — параметр (множитель Лагранжа).

Учитывая необходимый признак существования экстремума функции $F(x, y, \lambda)$ можно записать

$$F'_x\ (x, y, \lambda) = 0,\ F'_y(x, y, \lambda) = 0. \tag{3.5}$$

Заметим, что

$$F'_x\ (x, y, \lambda) = \varphi(x, y) = 0$$

Из полученной системы определяются координаты (x_i, y_i) точки возможного условного экстремума и значение λ, который играет лишь вспомогательную роль.

Решим задачу.

Пример 3. Фирма-монополист производит два вида товаров G_1 и G_2 в количестве q_1 и q_2 соответственно. Функция затрат имеет вид:

$$C = 10q + q_1 q_2 + 10q_2,$$

а кривые для спроса для каждого товара:

$$p_1 = 50 - q_1 + q_2,$$
$$p_2 = 30 + 2q_1 - q_2,$$

где p_1 и p_2 — цена единицы соответственно товаров G_1 и G_2. Кроме того, фирма связана ограничением на общий объем производства товаров G_1 и G_2, ее квота составляет 15 единиц, т. е.

$$q_1 + q_2 = 15.$$

Требуется найти максимальную прибыль, которая может быть достигнута при этом условии.

Решение. Начнем с построения целевой функции, в данном случае прибыли, которая определяется как разница между доходами и затратами: $\pi = R - C$

$$\pi = R - C.$$

Для дохода от продажи товара G_1 имеем:

$$R_1 = p_1 q_1 = (50 - q_1 + q_2)q_1 = 50q_1 - q_1^2 + q_1 q_2,$$

где выражение для p_1 берется из кривой спроса товара G_1. Аналогично доход от продажи товара G_2:

$$R_2 = p_2 q_2 = (30 + 2q_1 - q_2)q_2 = 30q_2 + 2q_1 q_2 - q_2^2.$$

Очевидно, что суммарный доход будет

$$R = R_1 + R_2 = 50q_1 - q_1^2 + 3q_1 q_2 + 30q_2 - q_2^2.$$

Поскольку затраты известны из условия задачи, то прибыль (целевая функция) имеет вид:

$$\pi(q_1, q_2) = R - C = \left(50q_1 - q_1^2 + 3q_1 q_2 + 30q_2 - q_2^2\right) -$$
$$-\left(10q_1 + q_1 q_2 + 10q_2\right) = 40q_1 - q_1^2 + 2q_1 q_2 + 20q_2 - q_2^2.$$

Переписав ограничение в виде

$$g(q_1, q_2) = 15 - q_1 - q_2 = 0,$$

получаем задачу условной оптимизации (поиска условного экстремума). Для ее решения применим метод Лагранжа.

Строим вспомогательную функцию

$$F(q_1, q_2, \lambda) = 40q_1 + 2q_1 q_2 + 20q_2 - q^2{}_2 + \lambda(15 - q_1 - q_2).$$

Вычисляем частные производные и приравниваем их к нулю:

$$F'_{q_1} = 40 - 2q_1 + 2q_2 - \lambda = 0,$$
$$F'_{q_2} = 2q_1 + 20 - 2q_2 - \lambda = 0$$
$$F'_{\lambda} = 15 - q_1 - q_2 = 0$$

Мы получили систему трех уравнений с тремя неизвестными. Представляем ее в виде

$$\begin{cases} -2q_1 + 2q_2 - \lambda = -40, \\ 2q_1 - 2q_2 - \lambda = -20, \\ q_1 + q_2 = 15 \end{cases}$$

и решаем методом исключения. Для этого складываем первое и втрое уравнения, что дает

$$-2\lambda = -60; \qquad \lambda = 30.$$

Подставляя в первое уравнение полученное значение, получаем

$$\begin{cases} -2q_1 + 2q_2 = -10, \\ q_1 + q_2 = 15, \end{cases}$$

т. е. систему двух уравнений с двумя неизвестными. Решая ее, легко находим

$$q_1 = 10; \qquad q_2 = 5.$$

Это и есть координаты точки условного экстремума, т. е. тот объем продаж, при котором прибыль максимальна. Соответствующее значение самой прибыли будет

$$\pi(10, 5) = 40 \cdot 10 - 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 5 - 5^2 = 475.$$

ГЛАВА 4. МНОГОФАКТОРНЫЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

4.1. Основные определения

Определение. Функция n независимых переменных, устанавливающая зависимость между затратами n производственных ресурсов и объемом выпускаемой продукции, называется ***n*-факторной производственной функцией — ПФ** (функцией выпуска)

$$y = F(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{4.1}$$

Если (4.1) выражает зависимость объема выпускаемой данным предприятием продукции от затрат ресурсов r_1, r_2, …, r_n, запасы которых ограничены, то, очевидно, допустимыми можно считать значения x_1, x_2, …, x_n, удовлетворяющие следующей системе неравенств:

$$\begin{gathered} 0 \le x_1 \le a_1, \\ 0 \le x_2 \le a_2, \\ \Lambda \\ 0 \le x_n \le a_n, \end{gathered} \tag{4.2}$$

где a_i (i = 1, 2, …, n) — запасы i-го ресурса (в стоимостном или натуральном выражении).

Не нарушая общности рассуждений, в дальнейшем будем рассматривать лишь функции двух независимых переменных.

При моделировании экономики страны в качестве основных ресурсов используют затраты труда L и объем производственных фондов K. Национальный доход Y выступает в роли результата деятельности экономики:

$$Y = F(K, L). \tag{4.3}$$

В математических моделях функционирования отдельного предприятия, цеха, участка и т. д. Y обозначает объем продукции, выпускаемый данным экономическим объектом.

Формальные свойства производственных функций

Производственная функция $f(x_1, x_2)$ определена при $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$. ПФ должна удовлетворять ряду (для каждой конкретной ПФ — своему) *свойств*:

1. $f(0, 0) = 0$; $f(0, x_2) = f(x_1, 0) = 0$;
2. $x > 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} > 0 \quad (i = 1, 2), \quad x = (x_1, x_2)$;

3. $x > 0 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} \le 0 \quad (i = 1, 2), \quad x = (x_1, x_2)$;

$$x > 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \ge 0 \quad x = (x_1, x_2);$$

4. $f(tx_1, tx_2) = t^p f(x_1, x_2)$.

Свойство 1 означает, что без ресурсов нет выпуска, что при отсутствии хотя бы одного из ресурсов нет выпуска.

Свойство 2 означает, что с ростом затрат хотя бы одного ресурса объем выпуска растет, и что с ростом затрат одного ресурса при неизменном количестве другого ресурса объем выпуска растет.

Свойство 3 означает что с ростом затрат одного (i-го) ресурса при неизменном количестве другого ресурса величина прироста выпуска на каждую дополнительную единицу i-го ресурса не растет (закон убывающей эффективности), при росте одного ресурса предельная эффективность другого ресурса возрастает. Если выполнены условия 3, то график ПФ есть поверхность, расположенная в неотрицательном ортанте $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $y \ge 0$ трехмерного пространства Ox_1x_2y и выпуклая вверх. Вообще геометрический образ ПФ должен прежде всего ассоциироваться с выпуклой горкой, крутизна которой убывает, если точка (x_1, x_2) уходит в плоскости Ox_1x_2 на «северо-восток».

Свойство 4 означает, что ПФ является однородной функцией (ОФ) степени $p > 0$. При $p > 1$ с ростом масштаба производства в t раз (число $t > 1$), т. е. с переходом от вектора x к вектору tx, объем выпуска возрастает в t^p ($> t$) раз, т. е. имеет рост эффективности производства от роста масштаба производства. При $p < 1$ имеем падание эффективности производства от роста масштаба производства. При $p = 1$ имеем постоянную эффективность производства при росте его масштаба (или имеем независимость удельного выпуска от масштаба производства — в английской терминологии *constant returns to scale*).

Для ПФКД $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \, (a_1 + a_2 = 1)$ свойства 1–4 выполняются.

Для ЛПФ $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \; (a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0)$ свойства 1 (при $a_0 = 0$) и свойство 4 не выполняются.

Множество (линия) l_q уровня $q = f(x_1, x_2)$ ($0 < q$ — действительное число) ПФ $y = f(x_1, x_2)$ называется изоквантой ПФ. Иными словами, линия уровня q — это множество точек, в котором ПФ постоянна и равна q.

Различные наборы (v_1, v_2) и (w_1, w_2) затрачиваемых (используемых) ресурсов, принадлежащие одной и той же изокванте l_q (т. е. $q = f(v_1, v_2) = f(w_1, w_2)$), дают один и тот же объем выпуска q. Изокванта есть линия, расположенная в неотрицательном октанте $\{(x_1, x_2) | x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ двумерной плоскости Ox_1x_2.

4.2. Функция Кобба-Дугласа и функция с постоянными пропорциями

Функция(4.3) Кобба-Дугласа имеет вид:

$$Y = Y_0 K^{\alpha} L^{1-\alpha},\ 0 < \alpha < 1.$$

При $K = 0$ результат функционирования экономического объекта

$$Y = Y_0 \cdot 0 \cdot L^{1-\alpha} = 0.$$

К такому же выводу приходим и при $L = 0$, т. е. оба ресурса абсолютно необходимы.

Если K и L увеличить в λ раз, то в такое же количество раз возрастает и Y.

Действительно,

$$F(\lambda K, \lambda L) = Y_0 (\lambda K)^{\alpha} (\lambda L)^{1-\alpha} = Y_0 \lambda^{\alpha} K^{\alpha} \lambda^{1-\alpha} L^{1-\alpha} =$$
$$= \lambda^{\alpha+1-\alpha} Y_0 K^{\alpha} L^{1-\alpha} = \lambda F(K, L).$$

Эта функция находит широкое применение в моделях долгосрочного прогнозирования.

Функцию с постоянными пропорциями

$$Y = Y_0 \min\left\{\frac{K}{K_0}, \frac{L}{L_0}\right\} (4.4)$$

выбирают тогда, когда один из ресурсов производства резко дефицитен, а второй избыточен.

Убедимся в том, что в этой функции реализуются предположения о свойствах производственных функций.

1. Если $K = 0$ или $L = 0$,

$$\min\left\{\frac{K}{K_0}, \frac{L}{L_0}\right\} = 0$$

и

$$Y = Y_0 \cdot 0 = 0$$

.

2. Предположим, что $\dfrac{K}{K_0} < \dfrac{L}{L_0}$ и $\lambda > 0$.

Тогда

$$\frac{\lambda K}{K_0} < \frac{\lambda L}{L_0}$$

и

$$F(\lambda K, \lambda L) = Y_0 \min\left\{\frac{\lambda K}{K_0}, \frac{\lambda L}{L_0}\right\} = Y_0 \cdot \frac{\lambda K}{K_0} = \lambda \cdot Y_0 \frac{K}{K_0} =$$

$$= \lambda Y_0 \min\left\{\frac{K}{K_0}, \frac{L}{L_0}\right\} = \lambda F(K, L)\,.$$

К такому же результату придем, если

$$\frac{\lambda K}{K_0} \geq \frac{\lambda L}{L_0}\,.$$

В процессе производства, описываемом функцией вида (9), следует использовать ресурсы в постоянной пропорции (16). Уровень выпуска возрастает в λ раз лишь при одновременном увеличении затрат обоих ресурсов в такое же число раз. Отношение $\frac{K_0}{L_0}$ задает рациональную пропорцию между K и L.

4.3. Предельные и средние значения производственной функции

Пусть $y = f(x) = f(x_1, x_2)$ — ПФ. Дробь $\frac{f(x)}{x_i}$ (i = 1, 2) называется средней производительностью i-го ресурса (фактора производства) (СПФ) или средним выпуском по i-му ресурсу (фактору производства). Символика:

$$A_i = \frac{f(x)}{x_i}\,.$$

Напомним, что (4.3) в случае двухфакторной ПФКД имеет вид

$$Y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$$

для средних производительностей $\frac{Y}{K}$ и $\frac{Y}{L}$ основного капитала и труда были использованы соответственно термины капиталоотдача и производительность труда. Эти термины используют и применительно к любым двухфакторным ПФ, у которых $x_1 = K$ и $x_2 = L$.

Пусть $y = f(x) = f(x_1, x_2)$ — ПФ.

Ее первая частная производная $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ (i = 1, 2) называется предельной (маржинальной) производительностью i-го ресурса (фактора производства) (ППФ) или предельным выпуском по i-му ресурсу (фактору производства). Символика:

$$M_i = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}. \tag{4.5}$$

Обозначим символами

$$\Delta x_i, \Delta_i(f(x)) \; (\Delta_1 f(x_1, x_2) = f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2);$$
$$\Delta_2 f(x_1, x_2) = f(x_1, x_2 + \Delta x_2) - (f(x_1, x_2))$$

соответственно, приращение переменной x_i и соответствующее ей частное приращение ПФ $f(x)$. При малых Δx_i имеем приближенное равенство

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \frac{\Delta_i f(x)}{\Delta x_i} (i = 1, 2).$$

Следовательно, ППФ (приближенно) показывает, на сколько единиц увеличится объем выпуска y, если объем затрат x_i i-го ресурса вырастает на одну (достаточно малую) единицу при неизменных объемах другого затрачиваемого ресурса. Здесь предельную величину $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ (т. е. ППФ) целесообразно интерпретировать, используя близкое к ней отношение малых конечных величин, т. е. $\Delta_i f(x)$ и Δx_i. Отмеченное обстоятельство является ключевым для понимания экономического смысла ППФ $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$. С другими предельными величинами следует поступать аналогичным образом.

Пример 1.

1) Для ПФКД $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ найти в явном виде A_1 и A_2, M_1и M_2.

Решение. Имеем:

$$A_1 = \frac{y}{x_1} = \frac{f(x)}{x_1} = a_0 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2}; \; A_2 = \frac{y}{x_2} = \frac{f(x)}{x_2} = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2 - 1};$$

$$M_1 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = a^1 \cdot A_1; \; M_2 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = a_2 \cdot A_2;$$

$$\frac{M_1}{A_1} = a_1 \le 1 \Rightarrow M_1 \le A_1; \ \frac{M_2}{A_2} = a_2 \le 1 \Rightarrow M_2 \le A_2.$$

Для ПФ $y = f(x)$ (не только для ПФКД) неравенства

$$M_1 \le A_1 \ (i = 1, 2),$$

(т. е. предельная производительность i-го ресурса не больше средней производительности этого ресурса) обычно выполняются.

2) Для ЛПФ $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \ (a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0)$ найти в явном виде A_1, A_2, M_1 и M_2.

Решение задачи. Имеем:

$$A_1 = \frac{y}{x_1} = \frac{f(x)}{x_1} = \frac{a_0}{x_1} + a_1 + a_2 \frac{x_2}{x_1}; \ A_2 = \frac{y}{x_2} = \frac{f(x)}{x_2} = \frac{a_0}{x_2} + a_1 \frac{x_1}{x_2} + a_2,$$

$$M_1 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = a_1, \ M_2 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = a_2,$$

$$\frac{M_1}{A_1} \le 1 \Rightarrow M_1 \le A_1; \ \frac{M_2}{A_2} \le 1 \Rightarrow M_2 \le A_2.$$

Пусть $y = f(x)$ – ПФ, $x = (x_1, x_2)$. Отношение предельной производительности M_i i-го ресурса к его средней производительности A_i называется (частной) эластичностью выпуска по i-му ресурсу (по фактору производства) (ЭФМ). Символика:

$$E_i = \frac{M_i}{A_i} = \frac{x_i}{f(x)} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} (i = 1, 2). \tag{4.6}$$

Сумма $E_1 + E_2 = E_x$ называется эластичностью производства.

Поскольку при малом приращении Δx_i имеем приближенное равенство

$$E_i = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right) \Big/ \left(\frac{f(x)}{x_i}\right) \approx \left(\frac{\Delta_i f(x)}{f(x)}\right) \Big/ \left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)$$

(крайнее правое выражение есть отношение двух относительных величин $\frac{\Delta_i f(x)}{f(x)}$ и $\frac{\Delta x_i}{x_i}$), поскольку E_i (приближенно) показывает, на сколько процентов увеличится выпуск y, если затраты i-го ресурса увеличатся на один процент при неизменных объемах другого ресурса. Пояснение выражения E_i, содержащего предельную величину $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, с помощью выражения, содержащего конечное приближение $\frac{\Delta_i f(x)}{f(x)}$ этой предельной величины, является ключевым в понимании экономической сути частной эластичности выпуска по i-му ресурсу.

Пример 2. Выписать в явном виде для ПФКД выражения для E_1, E_2 и E_x.

Решение. Из (4.6) имеем:

$$E_1 = a_1,\ E_2 = a_2,\ E_x = E_1 + E_2 = a_1 + a_2. \tag{4.7}$$

Пример 3. Для ЛПФ $y = a_1x_1 + a_2x_2$ $(a_0 = 0)$ выписать в явном виде выражения для E_1, E_2 и E_x.

Решение. Имеем(4.7):

$$E_1 = \frac{x_1}{f(x)}\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{a_1x_1}{a_1x_1 + a_2x_2};\ E_2 = \frac{x_2}{f(x)}\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = \frac{a_2x_2}{a_1x_1 + a_2x_2};$$

$$E_x = E_1 + E_2 = 1.$$

Пусть $y = f(x)$ – ПФ, $x = (x_1, x_2)$. Предельной нормой замены (замещения) i-го ресурса (фактора производства) j-м (аббревиатура: ПНЗФ и символика: R_{ij}) называется выражение

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i}(i, j = 1, 2) \tag{4.8}$$

при постоянной y.

Обратим внимание на то, что i — номер заменяемого ресурса, j — номер замещающего ресурса. Используется также термин: предельная технологическая норма замены (замещения) i-го ресурса (фактора производства) j-м ресурсом (фактором производства). Приведем более краткий термин: (предельная) норма замены (замещения) ресурсов.

Пусть выпуск y является постоянным (т. е. все наборы затрачиваемых ресурсов расположены на одной изокванте), тогда первый полный дифференциал dy ПФ $y = f(x)$ тождественно равен нулю:

$$0 = dy = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}dx_2$$

(здесь dx_1, dx_2 — дифференциалы переменных x_1, x_2), откуда, выражая первый дифференциал dx_j, получим ($i \neq j$).

$$dx_j = -\frac{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}} dx_i \ (i, j = 1, 2) \tag{4.9}$$

откуда, поделив на dx_i, получим

$$\frac{dx_j}{dx_i} = -\frac{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}} dx_i \ (i, j = 1, 2) \tag{4.10}$$

На основании (4.8), (4.9) и (4.10) имеем:

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}} > 0_i \ (i \neq j, i = 1, 2) \tag{4.11}$$

Отметим, что строгий вывод формулы (4.11) опирается в действительности на теорему о неявной функции, формулировка которой в настоящем пособии не приводится.

Непосредственно проверяется, что для двухфакторной ПФ справедливо равенство

$$R_{12} = \frac{E_1}{E_2} \frac{x_1}{x_2}.$$

Задания для самостоятельной работы

Задача 1. Найдите значения функций при заданных значениях независимых переменных:

а) $Y = 3K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{3}{4}}$, $K = 16$, $L = 81$;

б) $Y = 10 \min\left\{\dfrac{K}{4}, \dfrac{L}{5}\right\}$, $K = 12$, $L = 14$;

в) $Y = 0{,}25x_1 + 0{,}4x_2$, $x_1 = 100$, $x_2 = 80$;

г) $Y = \ln(x_1^2 + x_2^2 - 1)$, $x_1 = 4$, $x_2 = 3$.

Задача 2. Определите, как изменится значение функции(4.5)

$Y = 10 \min\left\{\frac{K}{4}, \frac{L}{5}\right\}$, если $K \geq \frac{4}{5}L$ и

а) K увеличить на 3 единицы;

б) L уменьшить на 1 единицу;

в) K увеличить в 2 раза при неизменном значении другой переменной;

А если затраты обоих ресурсов одновременно

г) уменьшить в 4 раза;

д) увеличить в 3 раза;

е) увеличить на 3 единицы?

Задача 3. Процесс производства описывается с помощью степенной функции выпуска $Y = 0{,}5K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$:

а) как следует изменить затраты K, чтобы компенсировать уменьшение L на 50 % (Уровень выпуска при этом сохраняется);

б) на сколько процентов уменьшатся затраты K при увеличении L на 25 %?

в) как изменится выпуск, если затраты обоих ресурсов увеличить в 2 раза (уменьшить в 3 раза)?

г) во сколько раз надо увеличить затраты L, чтобы компенсировать уменьшение K в 4 раза?

ГЛАВА 5. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Многие экономические задачи сводятся к линейным математическим моделям. Оптимизационные линейные математические модели называются моделями линейного программирования. Этот термин появился в конце 30-х годов, основы решения данной задачи заложил советский математик академик Л. Канторович. Под линейным программированием понимается решение данной задачи с линейной структурой. Также были разработаны подобные задачи в нелинейных структурах «нелинейное программирование» и «динамическое программирование», которые аналогичным образом подразумевают получение оптимального решения задач с соответствующей структурой.

5.1. Постановка задачи линейного программирования (ЗЛП)

Классически задача линейного программирования ставится следующим образом. Имеем балансовую линейную статическую модель, в которой следует найти максимум или минимум следующей функции

$$f=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \tag{5.1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i, (i=\overline{1,m_1});\\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i, (i=\overline{m_1+1,m_2});\\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j= b_i, (i=\overline{m_2+1,m});\end{cases} \tag{5.2–5.4}$$

где x_j, $j = 1, \ldots, n$ — управляющие переменные или решения задачи (5.1–5.4); b_j, a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$ — числовые параметры; функцию f называют целевой функцией.

Функция (5.1) — линейная, ограничения (5.2)–(5.4) — линейные. Задача содержит n переменных и m ограничений.

Решить задачу линейного программирования — это значит найти значения управляющих переменных x_j, $j = 1,\ldots, n$, удовлетворяющих ограничениям (5.2)–(5.4), при которых целевая функция (5.1) принимает минимальное или максимальное значение.

В зависимости от вида целевой функции (5.1) и ограничений (5.2)–(5.4) можно выделить несколько типов задач линейного программирования или линейных моделей: общая линейная задача, транспортная задача, задача о назначениях.

В этой главе рассматривается общая линейная задача.

Приведем пример экономической задачи, сводящейся к линейной модели.

Пример 5.1. Предприятие производит изделия трех видов, поставляет их заказчикам и реализует на рынке. Заказчикам требуется 1000 изделий первого вида. 2000 изделий второго вида и 2500 изделий третьего вида.

Условия спроса на рынке ограничивают число изделий первого вида 2000 единицами, второго — 3000 и третьего — 5000 единицами.

Для изготовления изделий используется 4 типа ресурсов (табл. 5.1).

Таблица 5.1 — Количество ресурсов, потребляемых для производства одного изделия, общее количество ресурсов и прибыль от реализации каждого вида изделия

Тип ресурсов	Вид изделий			Всего ресурсов
	1	2	3	
1	500	300	1000	25 000 000
2	1000	200	100	30 000 000
3	150	300	200	20 000 000
4	100	200	400	40 000 000
Прибыль	20	40	50	

Как организовать производство, чтобы:

1) обеспечить заказчиков;

2) не допустить затоваривания;

3) получить максимальную прибыль?

Построение математической модели 5.1.

Выполним последовательно этапы построения математической модели, сформулированные в данном пункте.

1) Цель — получение максимальной прибыли.

2) Параметрами являются все числовые данные, приведенные в условии задачи.

3) Управляющие переменные:

x_1 — число изделий первого вида;

x_2 — число изделий второго вида;

x_3 — число изделий третьего вида;

4) Ограничения: обеспечить заказчиков, не превысить, запас ресурсов, не допустить затоваривания рынка.

В соответствии с этими ограничениями выпишем область допустимых решений задачи:

$$\begin{cases} x_1 \geq 1000, \\ x_2 \geq 2000, \\ x_3 \geq 2500, \\ x_1 \leq 2000, \\ x_2 \leq 3000, \\ x_3 \leq 5000, \\ 500x_1 + 300x_2 + 1000x_3 \leq 25000000, \\ 100x_1 + 200x_2 + 100x_3 \leq 30000000, \\ 150x_1 + 300x_2 + 200x_3 \leq 20000000, \\ 100x_1 + 200x_2 + 400x_3 \leq 40000000. \end{cases} \tag{5.5}$$

Первые три неравенства в системе (5.5) соответствуют спросу заказчиков. Неравенства с четвертого по шестое формализуют спрос на рынке. Последние четыре неравенства соответствуют ограничениям по ресурсам.

5)Целевая функция или критерий эффективности задачи имеет вид

$$P = 20x_1 + 40\,x_2 + 50x_3 \to \max. \tag{5.6}$$

В формуле буквой P обозначена прибыль. Ее надо максимизировать. Каждое слагаемое определяет прибыль от производства изделий каждого вида соответственно *в* количествах x_1, x_2, x_3.

(5.5)–(5.6) — математическая модель поставленной задачи. Ограничения и целевая функция линейны по управляющим переменным, следовательно, данная модель является линейной. При составлении модели предполагалось, что прибыль линейно зависит от числа реализуемых изделий.

Приведем примеры некоторых типичных экономических и производственных задач, оптимальное решение которых может быть найдено с помощью построения и расчета соответствующих линейных математических моделей.

5.1.1. Планирование производства

Для изготовления различных видов изделий используются разные ресурсы. Общие запасы каждого ресурса, количество ресурса каждого типа, затрачиваемого на изготовление одного изделия каждого вида, и прибыль, получаемая от реализации одного изделия каждого вида, заданы. Нужно составить план производства изделий, обеспечивающий максимальную суммарную прибыль от реализации изделий. *Построение математической модели.*

Математическую модель строим по этапам.

1) Целью является максимизация прибыли.

2) Задача решается в общем виде, поэтому для определения параметров введем условные обозначения:

n — число различных видов изделий;

m — число различных типов ресурсов;

b_i — запас ресурса i-го типа, $i = 1, \ldots, m$;

a_{ij} — количество ресурсов i-го типа для изготовления одного изделия j-го вида, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$.

p_j — прибыль от реализации одного изделия j-го вида.

3)Управляющие переменные x_j, $j = 1, \ldots, n$ — число изделий j-го вида.

4) Ограничения задачи — это ограничения по ресурсам и условия неотрицательности управляющих переменных.

Таким образом, можно построить математическую модель.

$$Đ = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to \max. \tag{5.7}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_2; \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{5.8}$$

(5.7)–(5.8) — линейная математическая модель поставленной задачи. В результате ее расчета определяют оптимальный план производства, т. е. количество изделий каждого вида, которые надо изготовить так, чтобы при этом была максимальна прибыль (5.7) и не был превышен запас ресурсов (5.8).

5.1.2. Формирование минимальной потребительской продовольственной корзины

Задан ассортимент продуктов, имеющихся в продаже. Каждый продукт содержит определенное количество разных питательных веществ (витаминов и калорий). Известен требуемый человеку минимум питательных веществ каждого вида. Необходимо определить требуемую потребительскую продовольственную корзину, имеющую минимальную стоимость.

Составление математической модели.

1) Целью является минимизация стоимости потребительской корзины.

2) Параметры задачи:

n — число различных продуктов, имеющихся в продаже;

m — число различных питательных веществ, необходимых человеку;

a_{ij} — содержание i-го питательного вещества в j-*м* продукте, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$;

b_t — количество i-го питательного вещества, необходимое человеку, $i = 1, \ldots, m$;

c_j — стоимость единицы j-го продукта, $j = 1, \ldots, n$;

3) Управляющие переменные x_j, — это количество j-*го* продукта, входящего в потребительскую корзину, $j = 1, \ldots, n$;

4) Область допустимых решений определяется следующей системой неравенств, содержащей условия по необходимому уровню потребления каждого питательного вещества во всех продуктах и условия неотрицательности управляющих переменных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ge b_2; \\ \ldots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m; \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{5.9}$$

5) Критерий оптимальности C имеет вид

$$C = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min. \tag{5.10}$$

(5.9)–(5.10) — линейная математическая модель. После ее расчета определяют значения x_j, удовлетворяющие ограничениям (5.9) и доставляющие минимум функции (5.10), т. е. рассчитывается состав минимальной потребительской продовольственной корзины.

5.1.3. Расчет оптимальной загрузки оборудования

Предприятию необходимо выполнить производственный заказ на имеющемся оборудовании. Для каждой единицы оборудования заданы: фонд рабочего времени, себестоимость на изготовление единицы продукции каждого вида и производительность, т. е. число единиц продукции каждого вида, которое можно произвести в единицу времени. Нужно распределить изготовление продукции между оборудованием таким образом, чтобы себестоимость всей продукции была минимальна. *Составление математической модели.*

1) Целью является минимизация себестоимости.

2) Параметры:

m — номенклатура, т. е. число различных видов продукции в производственном заказе;

b_i — число единиц продукции i-го вида, $i = 1, \dots, n$;

n — число единиц оборудования;

T_j — фонд времени работы оборудования j-го типа, $j = 1, \dots, m$;

a_{ij} — производительность оборудования j-го типа по производству изделий i-го вида, $i = 1, \dots, n$;

c_{ij} — себестоимость изготовления единицы продукции i-го вида на оборудовании j-го типа,

3) Управляющие переменные x_{ij},— это время, в течение которого оборудование j-го типа занято изготовлением продукции i-го вида.

4) Область допустимых решений определяется ограничениями к (5.11) по фонду времени, ограничениями (5.12) по номенклатуре и условиями неотрицательности x_{ij}

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \dots x_{m1} \le T_1 \\ x_{12} + x_{22} + \dots x_{m2} \le T_2 \\ \dots.. \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots x_{mn} \le T_n \end{cases} \tag{5.11}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \dots a_{1n}x_{1n} \le b_1 \\ a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + \dots a_{2n}x_{2n} \le b_2 \\ \dots.. \\ a_{m1}x_{11} + a_{m2}x_{12} + \dots a_{mn}x_{mn} \le b_m \\ x_{ij} \ge 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n} \end{cases} \tag{5.12}$$

5) Критерий оптимальности задается функцией

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \tag{5.13}$$

где C — суммарная себестоимость.

Система (5.12)–(5.13) — линейная математическая модель задачи. Она содержит m·неизвестных (управляющих переменных) и $m + n$ ограничений, не считая условий (5.11). После расчета модели определяется оптимальная загрузка оборудования, т. е. время, в течение которого оборудование каждого типа занято изготовлением продукции каждого вида.

5.1.4. Раскрой материала

На раскрой (распил) поступает материал нескольких видов в определенном количестве. Из этого материала необходимо изготовить различные изделия. Материал может быть раскроен разными способами

Каждый способ имеет свою себестоимость и позволяет получить разное количество изделий каждого вида. Определить способ раскроя, при котором суммарная себестоимость минимальна.

Составление математической модели.

1) Цель — минимизация себестоимости раскроя.

2) Параметры:

n — число различных видов материала, поступающего на раскрой;

d_j — количество материала j-го вида, $i = 1, \ldots, n$;

m — число различных видов изделий, которые надо изготовить;

b_j — число изделий i-го вида, $j = 1, \ldots, m$;

l — число различных способов раскроя;

a_{ijk} — число изделий i-го вида, которое можно получить из единицы материала j-го вида при k-м способе раскроя $k = 1, \ldots, l$;

c_{jk} — себестоимость раскроя единицы материала j-го вида k-м способом;

3) Управляющие переменные x_{jk} — количество единиц материала j-го вида, раскраиваемых k-*м* способом;

4) Область допустимых решений определяется ограничениями по количеству исходного материала (5.14), ограничениями по выпуску (5.15) и условиями неотрицательности управляющих переменных.

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots x_{1l} \le d_1 \\ x_{12} + x_{22} + \ldots x_{2l} \le d_2 \\ \ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots x_{nl} \le d_n \end{cases} \qquad (5.14)$$

$$\begin{cases} a_{111}x_{11} + a_{112}x_{12} + \dots a_{1nl}x_{nl} = b_1 \\ a_{211}x_{21} + a_{212}x_{22} + \dots a_{2nl}x_{nl} = b_2 \\ \dots\dots \\ a_{ml1}x_{11} + a_{ml2}x_{12} + \dots a_{mnl}x_{nl} = b_m \\ x_{ij} \ge 0, j = \overline{1,n}, k = \overline{1,l} \end{cases} \quad (5.15)$$

5) Критерий оптимальности задается функцией

$$C = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} c_{jk}x_{jk} \to \min \quad (5.16)$$

(5.15)–(5.16) — линейная математическая модель поставленной задачи. Она содержит ml неизвестных (управляющих переменных) и $n + m$ ограничений, не считая условий неотрицательности переменных X_{jk}. После расчета модели определяется количество материала каждого вида, раскраиваемого различными способами.

Вместо критерия минимизации себестоимости в задаче может быть взят, например, критерий минимизации отходов. В этом случае в условии должно быть задано количество отходов, получаемых при каждом способе раскроя для единицы материала каждого вида.

5.2. Графический метод решения задачи линейного программирования

Если число переменных в задаче линейного программирования (ЗЛП) равно двум, а ограничениями является система неравенств, то задачу можно решать графическим методом.

Пример 5.2. При продаже двух видов товара используется 4 типа ресурсов (табл. 5.2).

Таблица 5.2 — Норма затрат ресурсов на реализацию единицы товара, общий объем каждого ресурса

Ресурсы	Норма затрат ресурсов на товары		Общее количество ресурсов
	1-го вида	2-го вида	
1	2	2	12
2	1	2	8
3	4	0	16
4	0	4	12

Прибыль от реализации одной единицы товара первого вида составляет 2 усл. ед., второго вида — 3 усл. ед.

Требуется найти оптимальный план реализации товаров, обеспечивающий торговому предприятию максимальную прибыль.

Решение.

Это задача составления плана реализации товара при $n = 2$, $m = 4$.

Математическая модель имеет вид

$$P = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max. \qquad (5.17)$$

В модели управляющие переменные x_1, x_2 — количество реализуемых изделий первого и второго вида, соответственно, P — прибыль. Система неравенств включает ограничения по ресурсам. Количество ресурсов на реализацию товаров первого и второго вида не превышает общего количества ресурсов каждого типа.

Графическое решение.

Построим в плоскости X_1OX_2 область допустимых решений. Каждое неравенство системы(5.15) определяет в плоскости X_1OX_2 полуплоскость, лежащую выше или ниже прямой, определяемой соответствующим уравнением. Построим прямые (см. рис. 5.1)

$$2x_1 + 2x_2 = 12;\ x_1 + 2x_2 = 8;\ 4x_1 = 16;\ 4x_2 = 12;\ x_1 = 0;\ x_2 = 0.$$

Рассмотрим точку с координатами $x_1 = 0$; $x_2 = 0$. Подставив их в первое неравенство, получаем $0 < 12$ — верно, следовательно, искомая полуплоскость лежит ниже прямой $2x_1 + 2x_2 = 12$; остальные полуплоскости находятся аналогичным образом.

Область $OABCD$ — область допустимых решений задачи.

Для нахождения максимального значения P проверим граничные. Точки из области решений.

Построим две линии уровня (рис. 5.1):

$$2x_1 + 3x_2 = 6;\ 2x_1 + 3x_2 = 13.$$

Функция P возрастает в направлении вектора-нормали $\vec{n} = (2, 3)$, следовательно, минимум находится в точке (0.0). Максимум определяем, передвигая нашу линию уровня в направлении вектора $\vec{n}$ параллельно самой себе до тех пор, пока хотя бы одна ее точка будет принадлежать области допустимых решений.

В данном случае это точка: $x_1 = 4$, $x_2 = 2$; при этом $P = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 14$.

Таким образом, для получения максимальной прибыли в размере 14 усл. ед. надо продать 4 изделия первого вида и 2 изделия второго вида.

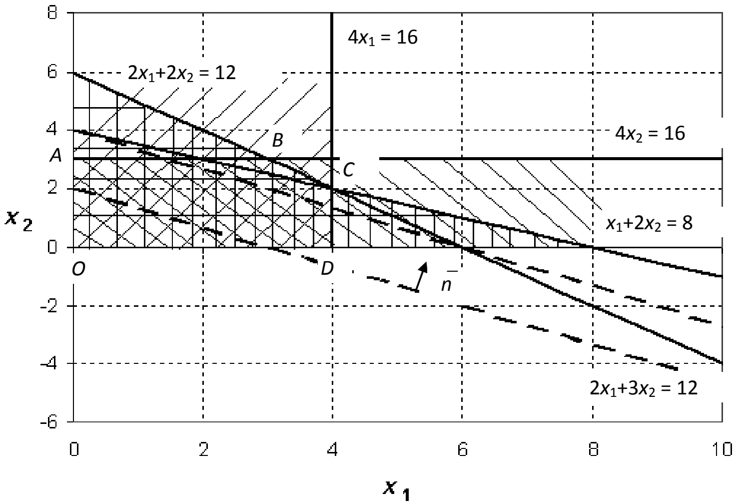


Рисунок 5.1 — Графический метод решения задачи ЛП

Изложенный выше графический метод применим для решения задач линейного программирования следующего вида:

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max(\min) \tag{5.18}$$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i,\ i = \overline{1, m_1} \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, i = \overline{m_1 + 1, m} \end{cases} \tag{5.19}$$

Алгоритм решения ЗЛП графическим методом.

1) Записывают уравнения прямых, соответствующих ограничениям (5.2–5.4), и строят их на плоскости X_1OX_3.

2) Определяют области, в которых выполняются ограничения задачи. Для этого выбирают произвольную точку на плоскости X_1OX_2 и подставляют ее координаты в первую часть одного из неравенств. Если неравенство верно, то искомая полуплоскость находится с той же стороны от прямой, что и точка; в противном случае искомая полуплоскость лежит с противоположной стороны от прямой. Эти действия последовательно выполняются для всех неравенств (5.2.–5.4).

3) Определяют область допустимых решений задачи как область пересечения *m* полуплоскостей, соответствующих *m* ограничениям задачи.

4) Определяют направление возрастания (убывания) целевой функции *f*. *Это* можно сделать двумя способами.

Можно построить вектор-нормаль $\vec{n} = (c_1, c_2)$, его направление показывает направление возрастания функции *f*, и противоположном направлении функция убывает. Можно просто построить две линии уровня функции $f = K_1$; $f = K_2$; (K_1, K_2 — произвольные константы, $K_1 \neq K_2$), и по их расположению определить направление возрастания (убывания) функции.

5) Определяют граничную точку (точки) области допустимых решений, в которых целевая функция принимает максимальное или минимальное значение.

6) Вычисляют значения найденной точки, решая совместно уравнения, задающие прямые, на пересечении которых находится эта точка, или выявляя уравнение граничной прямой области допустимых решений, с которой совпадает линия уровня целевой функции.

Возможны следующие варианты областей допустимых решений (рис. 5.2).

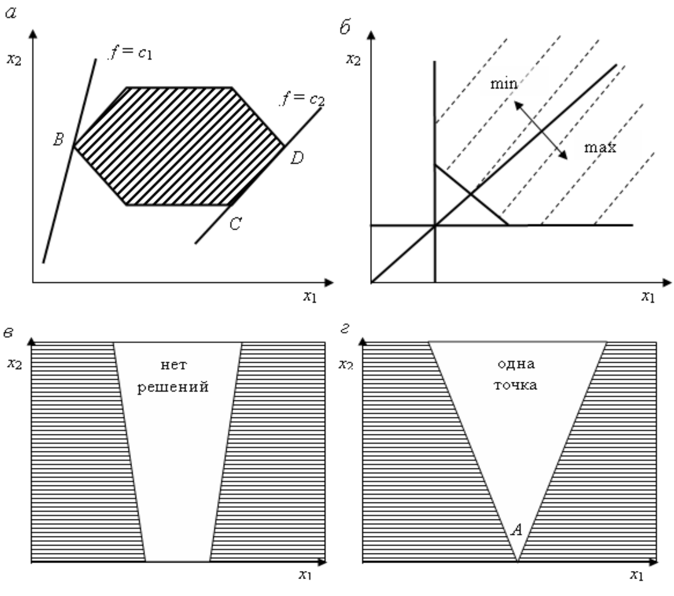


Рисунок 5.2 — Варианты областей допустимых решений:
а — область допустимых решений — замкнутое множество (многоугольник);
б — область допустимых решений — открытое множество; *в* — область допустимых решений — пустое множество (система ограничений (31) несовместна);
г — область допустимых решений состоит из единственной точки А

На рисунке 5.2 показаны варианты пересечения линии уровня целевой функции с областью допустимых решений. Может быть единственное решение — точка *B*, бесконечно много решений — отрезок *CD* (рис. 5.2*а*), максимальным (минимальным) значением целевой функции может быть бесконечность (рис. 5.2*б*). Область ограничений несовместимо (допустимых решений нет, рис. 5.2*в*). И может быть только одна допустимая точка (рис. 5.2*г*).

5.3. Стандартная и каноническая формы записи задач линейного программирования

В произвольной форме линейная математическая модель или задача линейного программирования имеет вид (5.2)–(5.4).

Наиболее распространенный метод ее решения – симплекс-метод. Заметим, что в случае двух переменных область допустимых решений, как правило, представляет собой замкнутый многоугольник (рис. 5.2). Для *n* переменных областью допустимых решений является многомерный многогранник, подобный симплексу. Оптимальное решение, как правило, это вершина (граничная точка) такого многогранника. Симплекс-метод заключается в последовательном целенаправленном обходе вершин симплекса. В каждой следующей граничной точке симплекса значение целевой функции, в общем случае, улучшается.

Для применения симплекс-метода задачу следует записать в канонической форме:

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... c_n x_n \to \max \tag{5.20}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... a_{2n}x_n = b_2 \\ ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... a_{mn}x_n = b_m \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,n} \end{cases} \tag{5.21}$$

В канонической форме записи все переменные неотрицательны, ограничениями являются уравнения, и требуется найти такие значения $x_j, j = \overline{1,n}$, и, при которых целевая функция имеет максимум.

Переход к канонической форме записи производится с помощью следующих простых действий.

1) Если требуется найти *минимум* *f*, то заменяя *f* на –*f* переходят к задаче максимизации, так как min (*f*) = –max(–*f*).

2) Если ограничение содержит неравенство со знаком $\leq$, то от него переходят к равенству, добавляя в левую часть ограничения дополнительную неотрицательную переменную.

3) Если ограничение содержит неравенство со знаком $\geq$, то от него переходят к равенству, вычитая из левой части дополнительную неотрицательную переменную.

4) Если в задаче какая либо из переменных произвольна, то от нее избавляются, заменяя ее разностью двух других неотрицательных переменных. Например, для произвольной переменной x_k, $x_k = x'_k - x''_k$, где $x'_k x''_k{}^{3}\ 0$, $x''_k{}^{3}\ 0$.

Пример 5.3.Записать в канонической форме задачу

$$f = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 10; \\ x_1 - 8x_2 - 2x_3 \leq 7 \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение.

$$f_1 = -f = -5x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

Вычитая дополнительную неотрицательную переменную x_4 из левой части первого неравенства, переходим к равенству.

Добавляя дополнительную неотрицательную переменную x_5 к левой части второго неравенства, также переходим к равенству.

Произвольную переменную x_3 заменяем разностью двух неотрицательных переменных $x_3 = x_6 - x_7$.

Окончательно получаем каноническую форму записи

$$f_1 = -5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 10; \\ x_1 - 8x_2 - 2x_3 + x_5 = 7 \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 20 \\ x_3 = x_6 - x_7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

Задача (5.20)–(5.21) называется основной задачей линейного программирования (ОЗЛП).

ОЗЛП не всегда имеет решение.

Во-первых, уравнения (5.21) могут оказаться несовместными.

Во-вторых, уравнения (5.21) могут оказаться совместными не в области неотрицательных решений.

В третьих, допустимые решения (5.10), (5.21) существуют, но среди них нет оптимального: функция f не ограничена в области допустимых решений.

Предположим, что все уравнения (5.21) линейно независимы, т. е. выражают независимые друг от друга условия задачи. Если это не так, то лишние уравнения надо просто исключить. Задачу (5.7)–(5.8) имеет смысл решать, когда число уравнений в системе ограничений (5.8) меньше числа входящих в них неизвестных: $m < n$. В противном случае, если $m = n$, то система имеет единственное решение, и задача максимизации функции (5.7) не имеет смысла; если $m > n$, то система (5.8) переопределена и в общем случае не имеет решений.

Если $m < n$, то система (5.8) имеет бесконечное множество решений и среди них можно выбрать оптимальное, доставляющее максимум функции (5.7).

5.4. Симплекс-метод решения задач линейного программирования

Симплекс-метод является методом направленного перебора решений системы (5.8). Геометрический смысл симплексного метода состоит в последовательном переходе от одной вершины многогранника ограничений к соседней, в которой линейная функция принимает лучшее (или то же самое) значение (по отношению к цели) до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение — вершина, где достигается оптимальное значение функции цели (если задача имеет решение).

Впервые симплексный метод был предложен американским ученым Дж. Данцингом в 1949 году, но еще в 1939 году идеи метода были разработаны и опубликованы российским ученым Л.В. Канторовичем.

Симплексный метод, позволяющий решить любую задачу линейного программировании, универсален. В настоящее время он используется для компьютерных расчетов, однако несложные примеры с применением симплексного метода можно решать вручную.

Симплекс-метод включает два этапа:

1) Определение начального решения, удовлетворяющего ограничениям (5.8).

2) Последовательное улучшение начального решения и получение оптимального решения задачи (5.7)–(5.8).

Любое решение задачи линейного программирования называется опорным планом задачи.

Система (5.8) содержит m линейно независимых уравнений, и их число меньше числа неизвестных, входящих в систему, следовательно, систему можно разрешить относительно m неизвестных, например x_1, x_2, …, x_m, выразив их через остальные неизвестные

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots \\ x_m + a_{nm+1}x_{m+1} + \ldots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Коэффициенты a_{ij}, b_i, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ в полученной системе, естественно, отличны от коэффициентов системы (5.8), но для простоты обозначены той же буквой.

Данный переход осуществляется с помощью элементарных алгебраических преобразований, включающих умножение правой и левой частей уравнения на одно и то же число и их сложение. Элементарные преобразования не влияют на значения решений системы.

После указанных преобразований задача записывается в следующем виде:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots c_nx_n \to \max \tag{5.22}$$

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots \\ x_m + a_{nm+1}x_{m+1} + \ldots a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n} \end{cases} \tag{5.23}$$

Алгоритм решения системы (5.22)–(5.23) симплекс-методом

Шаг 1. Получение начального решения.

Выбираются m-переменных, называемых базисными и обладающих следующим свойством: они входят с коэффициентом 1 только в одно уравнение и с коэффициентом 0 в остальные уравнения системы (5.23). Остальные $n–m$-переменные называют свободными.

Все свободные переменные полагаются равными 0, а базисные переменные — равные правым частям соответствующих ограничений системы (5.23).

Пусть m базисных переменных — это переменные x_1, x_2, ..., x_m (в противном случае переменные всегда можно перенумеровать). Тогда начальное решение X_0 имеет следующий вид:

$$X_0 = \{x_1 = b_1,\ x_2 = b_2,\ \ldots,\ x_m = b_m, x_{m+1} = 0,\ \ldots,\ x_n = 0\}.$$

Если все $b_i \geq 0$, то начальное решение является допустимым. Переходят к шагу 3. В противном случае используют алгоритм нахождения начального решения.

Шаг 3. Выражение функции f только через свободные переменные.

$$f = \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j$$

Значения коэффициентов c_j, $j = m + 1, \ldots, n$; естественно, отличны от значений коэффициентов в формуле (34), но для простоты обозначены той же буквой.)

Переход к шагу 3.

Шаг 4. Проверка решения на оптимальность.

Составляется симплекс-таблица (табл. 5.3). В левой колонке симплекс-таблицы находятся базисные переменные, в колонке свободных членов – правые части соответствующих ограничений. В i-й строке, j-*м* столбце стоит коэффициент при j-й переменной в i-м ограничении (5.23), $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. В последней строке (f-строке) стоит коэффициент с противоположным знаком при j-й переменной в целевой функции f. В последнем столбце стоят значения свободных членов, входящего в ограничения.

Таблица 5.3 — Симплекс-таблица

Базисные переменные	Коэффициенты при переменных								Свободные члены
	x_1	x_2	…	x_m	…	x_p	…	x_n	
x_1	a_{11}	a_{11}	……	a_{1m}	……	a_{1p}	……	a_{1n}	b_1
x_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2m}	…	a_{2p}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_q	a_{q1}	a_{q2}	…	a_{qm}	…	a_{qp}	…	a_{qn}	b_q
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_m	a_{m1}	a_{m2}	…	aA_{mn}	…	a_{mp}	…	a_{mn}	b_m
$-f$	$-c_1$	$-c_2$		$-c_m$		$-c_p$		$-c_n$	0

Для проверки решения на оптимальность просматривается последняя f-строка. Если коэффициенты, стоящие при свободных переменных неотрицательны, то полученное решение оптимально. Полученное решение единственно, если все эти коэффициенты положительны. Если среди неотрицательных коэффициентов встречается хотя бы один нулевой, то задача имеет бесконечное множество решений. Если в последней строке есть хотя бы один отрицательный коэффициент, а в соответствующем этому коэффициенту столбце нет ни одного положительного элемента, то целевая функция f не ограничена на области допустимых решений. Если хотя бы один из коэффициентов, стоящих при свободных переменных, отрицательный и в соответствующем ему столбце есть хотя бы положительный элемент, то полученное решение может быть улучшено. Переход к шагу 4.

Шаг 5. Получение нового решения.

Шаг 5.1. Выбор переменной, вводимой в список базисных переменных.

Просматривается последняя строка симплекс-таблицы. Среди элементов этой строки выбирается максимальный по абсолютной величине отрицательный элемент. Столбец, в котором стоит этот элемент, называется разрешающим. Пусть, например, это p-й столбец. Переменная x_p,, стоящая в этом столбце, вводится в список базисных переменных.

Шаг 5.2. Выбор переменной, выводимой из списка базисных переменных.

Находят отношение элементов столбца свободных членов к элементам разрешающего столбца. При делении на отрицательный элемент и 0 результат полагают равным $+\infty$. Среди этих отношений находят минимальное. Строка, соответствующая минимальному отношению, называется разрешающей. Пусть, например, это q-*я* строка. Базисная переменная x_q, стоящая в этой строке, выводится из списка базисных переменных. Элемент симплекс — таблицы a_{qp}, стоящий на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца, называется разрешающим элементом.

Шаг 5.3. Выполнение симплекс-преобразования и переход к новой симплекс-таблице.

Элемент a_{ij} новой симплекс-таблицы вычисляется с помощью следующего симплекс-преобразования:

$$a'_{ij} = a_{qj} / a_{qp}, i = q; \tag{5.24}$$

$$a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij} - a_{ip} a_{qj} / a_{qp}, i \neq q; \\ i = \overline{1, m+1}, j = \overline{1, n+1}; \\ a_{m+1j} = -c_j; \\ a_{in+1} = b_i. \end{cases} \tag{5.25}$$

Таким образом, при переходе к новой симплекс-таблице все элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент, а все остальные элементы симплекс-таблицы, включая коэффициенты целевой функции и свободные члены, пересчитываются по формуле (5.25).

Новое решение имеет следующий вид: все свободные переменные в нем полагаются равными 0, а все базисные переменные — свободным членам, стоящим в одной строке с ними.

После построения новой симплекс-таблицы следует перейти к шагу 3. Поясним на примерах некоторые шаги алгоритма.

Шаг 5.4. Максимизировать функцию.

$$F = 2x_1 - 3x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2, \\ .\quad x_i \geq 0 \quad . \end{cases}$$

Базисные переменные: x_3, x_4.

Свободные переменные:

$$X_0 = \{x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 6, x_4 = 7\}$$

Симплекс-таблица имеет следующий вид (табл. 5.4):

Значение f можно увеличить, увеличивая значение переменной x_1, так как ей соответствует положительный коэффициент в формуле для f, соответственно, отрицательный коэффициент в последней строке симплекс-таблицы. Из системы ограничений видно, что при любом увеличении значения X_1 можно подобрать значения x_3, x_4, при которых будет выполняться система ограничений. Следовательно, функция f будет бесконечно возрастать и не будет ограниченной на области допустимых решений

Таблица 5.4 — Симплекс-таблица

Базисные переменные	Коэффициенты при переменных				Свободные члены
	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_4 x_3	–1 –5	2 –3	1 0	0	6 7
$-f$	–2	3	0	0	0

Пример 5.5. Максимизировать функцию

$$f = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \max.$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 15; \\ x_1 + 3x_3 \leq 7; \\ -2x_1 + 8x_2 \leq 20. \end{cases}$$

Решение. Запишем задачу в каноническом виде, вводя дополнительные переменные x_4, x_5, x_6.

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 15; \\ x_1 + 3x_3 + x_5 = 7; \\ -2x_1 + 8x_2 + x_6 = 20; \\ x_j \ge 0, j = 1,2,3,4,5,6. \end{cases}$$

Начальное решение:

$$X_0 = \{x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 15, x_5 = 7, x_6 = 20\}$$

Функция $f = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3$ уже выражена через свободные переменные, поэтому можно перейти к составлению симплекс-таблицы (табл. 5.5).

Таблица 5.5 — Симплекс-таблица

Базисные переменные	Коэффициенты при переменных						Свободные члены
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	3	3	–1	1	0	0	15
x_5	1	0	3	0	1	0	7
x_6	–2	8	0	0	0	1	20
$-f$	–5	2	–3	0	0	0	0

Ввод переменной в список базисных переменных означает, что ей приписывается отличное от 0 положительное значение, т. е. ее значение увеличивается. Из формулы для целевой функции $f = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3$ видно, что увеличение значения x_2 приводит только к уменьшению f, т. е. переменную x_2 бессмысленно вводить в список базисных переменных. Увеличение переменных x_1 и x_3 приводит к увеличению значения f при этом на большую величину значение изменяется с увеличением x_1, следовательно, переменная x_1 должна стать базисной переменной. Максимальное значение коэффициента при x_1 в формуле для f соответствует максимальному по абсолютной величине отрицательному элементу в последней строке симплекс-таблицы, следовательно, понятен выбор новой базисной переменной.

Для определения переменной, выводимой из списка базисных переменных, надо в соответствии с алгоритмом симплекс-метода найти отношения элементов столбца свободных членов к элементам разрешающего столбца и среди них выбрать минимальное.

$$\min\{15/3;\ 7/1;\ 20/–2\} = \{5;\ 7;\ +\infty\} = 5,$$

следовательно, из списка базисных переменных надо вывести x_4, стоящую в первой строке симплекс-таблицы, и разрешающий элемент $a_{11} = 3$.

Поясним этот выбор. Если перейти от симплекс-таблицы к ограничениям, то это значит, что x_1 надо выразить из первого уравнения через остальные переменные, включая x_4, и, подставив его во второе и третье уравнения, исключить оттуда x_4. Проделаем это ниже, а сейчас поясним, почему выбор пал именно на x_4.

Попробуем вывести из списка базисных другую переменную, например x_5. Для этого выразим x_1 через x_5 и остальные переменные из второго уравнения и подставим в остальные.

$$x_1 = 7 - 3x_3 - x_5.$$

Подставив x_1 в первое уравнение, получим

$$3(7 - 3x_3 - x_5) + 3x_2 - x_3 + x_4;$$
$$3x_2 - 10x_3 + x_4 - 3x_5 = -6.$$

Подставив x_2 во второе уравнение, получим

$$-2(7 - 3x_3 - x_5) + 8x_2 + x_6 = 20;$$
$$8x_2 - 6x_3 + 2x_5 + 3x_6 = 34.$$

Окончательно получим

$$3x_2 - 10x_3 + x_4 - 3x_5 = -6;$$
$$x_1 + 3x_3 + x_5 = 7;$$
$$8x_2 + 6x_3 + 2x_5 + x_6 = 34,$$

где x_1, x_4, x_6 — базисные переменные, поэтому решение имеет вид

$$X_1 = \{x_1 = 7, x_2 = 0; x_3 = 0, x_4 = -6, x_6 = 34\}.$$

В этом решении $x_4 = -6$, что противоречит условию задачи $x_4 \geq 0$ следовательно, X_1 не является допустимым решением, и, таким образом, переменную x_5 нельзя вывести из списка базисных переменных.

Вывод из списка базисных переменных переменной x_6 означает, что x_1 надо выразить через x_6 из последнего уравнения исходной системы ограничений. Получившаяся при этом правая часть уравнения будет являться значением базисной переменной x_1 в новом решении.

Выразив x_1 через x_6, получим

$$-2x_1 + 8x_2 + x_6 = 20;$$
$$x_1 - 4x_4 - x_6/2 = -10.$$

Следовательно, в новом решении $x_1 = -10$, что противоречит условию неотрицательности x_1, поэтому на шаге 4.2 пренебрегают делением на отрицательное число, полагая равным $+\infty$ результат от деления.

Пример 5.6. Предприятие рекламирует свою продукцию с использованием четырех источников массовой информации: телевидения, радио, газет и расклейки объявлений. Анализ рекламной деятельности в прошлом показал, что эти средства приводят к увеличению прибыли соответственно на 10, 5, 7 и 4 усл. ед., в расчете на 1 усл. ед., затраченную на рекламу. На рекламу выделено 50 000 усл. ед. Администрация предприятия не намерена тратить на телевидение более 40 %, а на радио и газеты — более 50 % от общей суммы выделенных средств. Как следует предприятию организовать рекламу, чтобы получить максимальную прибыль?

Решение. Составим математическую модель задачи.

Цель — максимизация прибыли.

Параметрами являются все числа, приведенные в условии задачи.

Управляющие переменные:

x_1 — количество средств, вложенных в рекламу на телевидение;

x_2 — количество средств, вложенных в рекламу на радио;

x_3 — количество средств, вложенных в рекламу в газетах;

x_4 — количество средств, вложенных в рекламу, организованную с помощью расклейки объявлений.

Область допустимых решений имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 50000; \\ x_1 \le 20000; \\ x_2 + x_3 \le 25000; \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_3 \ge 0; x_4 \ge 0. \end{cases} \tag{5.26}$$

Она содержит ограничения по общей сумме выделенных средств, по количеству средств, предусмотренных на рекламу по телевидению, на радио и в газетах, и условия неотрицательности управляющих переменных.

Критерий оптимальности записывается следующим образом:

$$P = 10x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 4x_4 \to \max. \tag{5.27}$$

(5.26)–(5.27) — математическая модель задачи организации рекламной деятельности.

Целевая функция и ограничения линейны по управляющим переменным, следовательно, это задача линейного программирования.

Приведем задачу к каноническому виду, добавив дополнительные переменные к левым частям ограничений (38). Получим

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 50000; \\ x_1 + x_6 = 20000; \\ x_2 + x_3 + x_7 = 25000; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0. \end{cases} \tag{5.28}$$

Задача (5.27)–(5.28) может быть решена симплекс-методом.

Решение.

Шаг 1. Получение начального решения.

Базисные переменные:x_5, x_6, x_7.

Свободные переменные:x_1, x_2, x_3, x_4.

Начальное решение:

$$X_о = \{x_1 = 0;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0;\ x_4 = 0;\ x_5 = 50\,000;\ x_6 = 20\,000;\ x_7 = 25\,000\}.$$

Шаг 2. Функция $P = 10x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 4x_4$ уже выражена через свободные переменные.

Шаг 3. Проверка решения на оптимальность. Составляем симплекс-таблицу (табл. 5.6).

Таблица 5.6 — Симплекс-таблица

Базисные переменные	Коэффициенты при переменных							Свободные члены
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	1	1	1	1	1	0	0	50 000
x_6	1	0	0	0	0	1	0	20 000
x_7	0	1	1	0	0	0	1	25 000
P	–10	–5	–7	–4	0	0	0	0

Решение не оптимально, так как последняя строка содержит отрицательные числа.

Шаг 4. Получение нового решения.

Максимальное по абсолютной величине отрицательное число последней строки — это –10; следовательно, первый столбец является разрешающим и переменная x_1 вводится в список базисных переменных. Найдем переменную, выводимую из списка базисных переменных. Для этого подсчитаем отношения элементов столбца свободных членов к элементам разрешающего столбца и выберем среди них минимальное.

$$\min\left\{\frac{50000}{1};\frac{20000}{1};\frac{25000}{1}\right\}=20000.$$

Вторая строка является разрешающей, и переменная x_6 должна быть выведена из списка базисных переменных.

Разрешающий элемент $a_{21} = 1$.

Составим новую симплекс-таблицу.

Для подсчета элементов новой симплекс-таблицы по формулам (5.23–5.24) удобно использовать правило треугольника, наглядно отображающее указанные формулы.

Правило треугольника. Для получения элемента новой симплекс-таблицы надо от элемента предыдущей симплекс-таблицы, стоящего на том же месте, отнять следующее выражение: произведение элемента разрешающей строки, стоящего в одном столбце с данным элементом, на элемент данной строки, стоящий в одном столбце с разрешающим элементом, деленное на разрешающий элемент. Это выражение как бы соответствует треугольнику.

Таким образом, все элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент. Остальные элементы пересчитываются по правилу треугольника.

Новая симплекс-таблица имеет следующий вид (табл. 5.7).

Таблица 5.7 — Симплекс-таблица

Базисные переменные	Коэффициенты при переменных							Свободные члены
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	0	1	1	1	1	–1	0	30 000
x_1	1	0	0	0	0	1	0	20 000
x_7	0	1	1	0	0	0	1	25 000
P	0	–5	–7	–4	0	10	0	200 000

Новое решение имеет вид

$$X_1 = \{x_1 = 20\,000,\ x_2 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 30\,000,\ x_6 = 0,\ x_7 = 25\,000\}.$$
$$P_1 = 200\,000.$$

Таким образом, прибыль увеличилась на 200 000 усл. ед. Это решение не оптимально, так как последняя строка содержит отрицательные числа. Продолжаем оптимизацию.

Разрешающий столбец — третий, так как ему соответствует максимальное по абсолютной величине отрицательное число –7.

$$\min\left\{\frac{30000}{1};\frac{20000}{01};\frac{25000}{1}\right\}=25000.$$

Следовательно, третья строка является разрешающей.

Разрешающий элемент: $a_{33} = 1$.

Перейдем к новой симплекс-таблице (табл. 5.8).

Таблица 5.8 — Симплекс-таблица

Базисные переменные	Коэффициенты при переменных							Свободные члены
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	0	0	0	1	1	–1	–1	5000
x_1	1	0	0	0	0	1	0	20 000
x_3	0	1	1	0	0	0	1	25 000
P	0	2	0	–4	0	10	7	375 000

$$X_1 = \{x_1 = 20\,000,\ x_2 = 0,\ x_3 = 25\,000,\ x_4 = 0,\ x_5 = 5000,\ x_6 = 0,\ x_7 = 0\}.$$
$$P_1 = 375\,000.$$

Прибыль выросла, но решение X_2 не оптимально, так как в последней строке еще осталось отрицательное число.

Получим новое решение.

Разрешающий столбец — четвертый, следовательно, переменная x_4 вводится в список базисных переменных.

$$\min\left\{\frac{5000}{1};\frac{20000}{0};\frac{25000}{0}\right\}=5000.$$

Разрешающая строка — первая, и переменная x_5 выводится из списка базисных переменных.

Новая симплекс-таблица имеет следующий вид (табл. 5.9):

Последнее решение является оптимальным, поскольку все числа, стоящие в последней строке, неотрицательны. Это решение единственно, так как все элементы последней строки, соответствующие свободным переменным x_2, x_5, x_6, x_7, строго положительны.

$$X^* = \{x_1 = 20\,000,\ x_2 = 0,\ x_3 = 25\,000,\ x_4 = 5000,\ x_5 = 0,\ x_6 = 0,\ x_7 = 0\}.$$
$$P_1 = 395\,000.$$

Таблица 5.9 — Симплекс-таблица

Базисные переменные	Коэффициенты при переменных							Свободные члены
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_4	0	0	0	1	1	–1	–1	5000
x_1	1	0	0	0	0	1	0	20 000
x_3	0	1	1	0	0	0	1	25 000
P	0	2	0	0	4	6	3	395 000

Таким образом, для получения максимальной прибыли в размере 395 000 усл. ед. надо распределить средства следующим образом: 20 000 усл. ед. вложить в рекламу на телевидении; 20 000 усл. ед. вложить в рекламу в газетах и 5000 усл. ед. вложить в рекламу, организованную с помощью расклейки объявлений. Рекламу на радио организовывать не следует.

Изложенные выше вычисления проводились для случая, когда начальное решение является допустимым. Если в начальном решении существуют $b_i < 0$, то допустимое начальное решение можно найти по следующему алгоритму.

Шаг 1. Выражение функции f через свободные переменные.

Шаг 3. Составление симплекс-таблицы.

Шаг 3. Выбор переменной, вводимой в список базисных переменных.

Просматривается строка, содержащая максимальный по абсолютной величине отрицательный свободный член, и по максимальному по абсолютной величине отрицательному элементу этой строки выбирается разрешающий столбец, например столбец с номером p. Переменная, стоящая в этом столбце, вводится в список базисных переменных. Если просматриваемая строка не содержит отрицательных элементов, то система ограничений несовместна, исходная задача решений не имеет.

Шаг 4. Выбор переменной, выводимой из списка базисных переменных.

Находят отношения элементов столбца свободных членов к элементам разрешающего столбца. Рассматривают отношения, в которых числитель и знаменатель отрицательные, и среди них выбирают минимальное. Строка, соответствующая выбранному отношению, например q-*я,* является разрешающей, и переменная, Стоящая в этой строке, выводится из списка базисных переменных. Элемент a_{qp}, стоящий на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца, является разрешающим элементом.

Шаг 5. По формулам (8.23) и (8.24) проводят симплекс-преобразование и переходят к новой симплекс-таблице. Если в новой таблице все свободные члены неотрицательны, то найденное решение является допустимым и следует перейти к шагу 3 алгоритма симплекс-метода, в противном случае — к шагу 2 рассматриваемого алгоритма.

Заметим, что существуют различные программы, реализующие симплекс-метод на персональном компьютере. Исследователю нужно только построить линейную модель и ввести исходные данные. Все расчеты, изложенные выше, на персональном компьютере осуществятся в течение нескольких секунд.

5.5. Двойственная задача линейного программирования.

Экономическая интерпретация

Рассмотрим задачу линейного программирования (ЗЛП) следующего вида:

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max.$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0. \end{cases} \qquad (5.29\text{–}5.30)$$

В задаче требуется максимизировать целевую функцию. Все ограничения являются неравенствами со знаком $\le$, все переменные x_1, x_2, ..., x_n неотрицательны. Задача содержит n управляющих переменных и m ограничений. Коэффициенты при переменных в целевой функции: c_1, c_2, ..., c_n; свободные члены: b_1, b_2, …, b_m.

Двойственная задача линейного программирования имеет вид

$$g = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_n y_n \to \min.$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \ge c_1; \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \ge c_2; \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \ge c_m; \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, \ldots, y_n \ge 0. \end{cases} \qquad (5.31\text{–}5.32)$$

В двойственной задаче требуется найти минимум целевой функции, соответственно все ограничения — неравенства должны быть со знаком $\ge$. Управляющие переменные y_1, y_2, …, y_m неотрицательны. Задача содержит m управляющих переменных и nограничений. Коэффициенты целевой функции задачи b_1, b_2, … , b_m являются свободными членами исходной ЗЛП, а свободные члены двойственной задачи c_1, c_2, ..., c_n — коэффициентами целевой функции исходной ЗЛП. Матрица коэффициентов двойственной задачи транспонирована, т. е. строки заменены столбцами, а столбцы — строками.

Задачи (5.29–5.30) и (5.31–5.32) называются парой взаимно двойственных задач линейного программирования.

Для двойственных задач верна следующая теорема.

Теорема двойственности: если одна из взаимно двойственных задач имеет оптимальное решение x^*, то другая также имеет оптимальное решение y^*. При этом соответствующие им оптимальные значения целевых функций $f^* = f(x^*)$ и $g = g(y^*)$ равны.

Поясним экономический смысл двойственной модели. Пусть в качестве управляющих переменных x_j, $j = 1, \ldots, n$; исходной модели рассматривается число изделий, производимых некоторым предприятием, а параметрами b_i, $i = 1, \ldots, m$ — количество ресурсов i-го типа, используемых для изготовления изделий. Через a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$; обозначено количество ресурсов i-го типа, идущее на изготовление одного изделия j-го вида, (j — прибыль от реализации одного изделия j-го вида). Тогда исходная модель (5.29)–(5.30) соответствует задаче определения оптимального плана производства продукции, обеспечивающего максимальную прибыль.

Пусть предприятие решило прекратить производство изделий и продать ресурсы, идущие на их изготовление. Обозначим через y_i цены на единицу ресурсов i-го вида, $i = 1, \ldots, m$. Цены на ресурсы должны удовлетворять следующим двум условиям: во-первых, они не должны быть слишком высокими, иначе ресурсы невозможно будет продать; а во-вторых, цены на ресурсы должны быть такими, чтобы прибыль от их реализации была больше прибыли от реализации готовой продукции. Первое условие выражается формулой (5.31), второе условие — ограничениями (5.32). В левой части каждого из неравенств (5.32) стоит прибыль от продажи ресурсов всех типов, идущих на изготовление j-го изделия, в правой части — прибыль от продажи j-го изделия, $j = 1, \ldots, n$. Таким образом, двойственная задача (5.31)–(5.32) соответствует следующей экономической проблеме: по каким минимальным ценам следует продавать ресурсы, чтобы прибыль от их реализации была больше прибыли, полученной от реализации продукции, изготавливаемой с использованием этих ресурсов. Значения переменных $y_1, y_2, \ldots, y_m$ часто называют теневыми ценами.

Построение двойственной задачи позволяет глубже разобраться в поставленной экономической проблеме.

5.6. Целочисленное линейное программирование. Метод Гомори

Если управляющие переменные в задаче линейного программирования определяют количество единиц неделимой продукции, то оптимальное решение должно быть получено в целых числах. К задачам такого типа относится большое число экономических задач, например распределение производственных заказов между предприятиями, оптимальный раскрой материалов, определение загрузки оборудования, распределение транспортных средств по рейсам, задачи производства и реализации неделимой продукции. Если единица составляет малую часть от общего количества, например при планировании массового и крупносерийного производства, то для нахождения оптимального решения применяют обычный симплекс-метод и округляют полученное решение до целого. В противном случае, например при планировании производства или реализации автомобилей, округление может привести к решению, далекому от оптимального. Линейные задачи, решение которых должно быть получено в целых числах, называют задачами целочисленного программирования (ЦЛП).

Математическая модель задачи ЦЛП имеет следующий вид:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min).$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \ge b_i, i = \overline{m_1 + 1, m_2}; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \le b_i, i = \overline{1, m_1}; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} = b_i, i = \overline{m_2 + 1, m}; \\ x_j \in Z, j = \overline{1, n}, \end{cases} \qquad (5.33–5.34)$$

где Z — множество целых чисел.

Для решения задачи ЦЛП может быть применен метод Гомори.

Метод Гомори содержит два этапа.

Этап 1. Решение исходной задачи обычным симплекс-методом и проверка решения на целочисленность. Если решение содержит хотя бы одно дробное значение, то переходят к этапу 2, в противном случае расчет заканчивается.

Этап 3. Составление дополнительного ограничения (сечения) и решение расширенной задачи обычным симплекс-методом. Дополнительное ограничение (сечение) отсекает нецелочисленные решения. Сечение обладает следующими двумя свойствами:

1) любое целочисленное решение ему удовлетворяет;

2) любое не целочисленное решение задачи ему не удовлетворяет.

Объясним, как составляется сечение.

Пусть выполнен этап 1:

$$X = \{x_1 = b_1;\ x_2 = b_2;\ \ldots\ x_i = b_i;\ x_m = b_m;\ x_{m+1} = 0;\ \ldots\ x_n = 0\}.$$

где b_i — дробное число.

Рассмотрим i-е ограничение:

$$b_i = x_i + a_{im} + lx_{m+1} + a_{im+2}x_{m+2} + \ldots + a_{in}x_n .$$

Так как b_i —дробное, а в правой части все переменные целые, хотя бы одно значение a_{ij}, $j = 1, \ldots, n$ должно быть дробным.

Возьмем дробную часть от левой и правой частей ограничения.

Обозначим через $\{r\}$ дробную часть числа r.

Дробная часть суммы не превосходит суммы дробных частей слагаемых, поэтому

$$\{x_1 + a_{im+1}x_{m+1} + a_{im+2}x_{m+2} + \ldots + a_{im}x_n\} \le \{x_i\} + \{a_{im+1}x_{m+1}\} + \\ + \{a_{im+2}x_{m+2}\} + \ldots + \{a_{im}x_n\}.$$

Дробная часть произведения не превосходит произведения целого на дробную часть, следовательно:

$$\{x_i\} + \{a_{im+1}x_{m+1}\} + \{a_{im+2}x_{m+2}\} + \ldots + \{a_{im}x_n\} \le x_{m+1}\{a_{im+1}\} + \\ + x_{m+2}\{a_{im+2}\} + \ldots + x_n\{a_{in}\}.$$

В результате имеем

$$\{b_i\} \le x_{m+1}\{a_{im+1}\} + x_{m+2}\{a_{im+2}\} + \ldots + x_n\{a_{in}\}$$

Обозначим

$$\{a_{ij}\} = q_{ij},$$
$$\{b_i\} = q_i.$$

Тогда из последнего неравенства получаем

$$q_{im+1}x_{m+1} + q_{m+2}x_{m+2} + \ldots + q_{in}x_n \ge q_i.$$

Отняв от левой части неравенства дополнительную неотрицательную переменную, переходим к уравнению

$$q_{im+1}x_{m+1} + q_{m+2}x_{m+2} + \ldots + q_{in}x_n - x_{n+1} = q_i;$$
$$x_{n+1} \ge 0.$$

При дополнении этого ограничения к исходной задаче мы получили задачу большей размерности.

Эту задачу решают обычным симплекс-методом, т. е. переходя к этапу 1. Если при решении задачи симплекс-методом имеется несколько дробных решений, то дополнительные ограничения следует составлять для значения, имеющего максимальную дробную часть.

5.7. Транспортная задача

Под названием транспортная задача объединяется широкий круг задач с единой математической моделью. Данные задачи относятся к задачам линейного программирования и могут быть решены известным симплексным методом. Однако, обычная транспортная задача имеет большое число переменных и решение ее симплексным методом громоздко. С другой стороны, матрица системы ограничений транспортной задачи весьма своеобразна, поэтому для ее решения разработаны специальные методы. Эти методы, как и симплексный метод, позволяют найти начальное опорное решение, а затем, улучшая его, получить последовательность опорных решений, которая завершается оптимальным решением.

Условие:

Однородный груз сосредоточен у m поставщиков в объемах a_1, a_2, ..., a_m. Данный груз необходимо доставить n потребителям в объемах b_1, b_2 ..., b_n. Известны C_{ij}, $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$ — стоимости перевозки единиц груза от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю. Требуется составить такой план перевозок, при котором запасы всех поставщиков вывозятся полностью, запросы всех потребителей удовлетворяются полностью, и суммарные затраты на перевозку всех грузов являются минимальными.

Исходные данные транспортной задачи записываются в виде таблицы 5.10:

Таблица 5.10 — Исходные данные транспортной задачи

	b_j / a_j	b_1	b_2	…	b_n
Поставщики	a_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}
	a_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}
	a_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}
	…	…	…	…	…
	a_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}

Исходные данные задачи могут быть представлены в виде:

- вектора A = (a_1, a_2, ..., a_m) — запасов поставщиков
- вектора B = (b_1, b_2, ..., b_n) — запросов потребителей
- матрицы стоимостей:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots c_{mn} \end{pmatrix}$$

Математическая модель транспортной задачи:

Переменными (неизвестными) транспортной задачи являются x_{ij}, $i = 1, 2, ..., m_j = 1, 2, ..., n$ — объемы перевозок от i-го поставщика каждому j-му потребителю. Эти переменные могут быть записаны в виде матрицы перевозок:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots x_{mn} \end{pmatrix}$$

Так как произведение $C_{ij}X_{ij}$ определяет затраты на перевозку груза от i-го поставщика j-му потребителю, то суммарные затраты на перевозку всех грузов равны:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad (5.35)$$

По условию задачи требуется обеспечить минимум суммарных затрат. Следовательно, целевая функция задачи имеет вид:

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \qquad (5.36)$$

Система ограничений задачи состоит из двух групп уравнений. Первая группа из m уравнений описывает тот факт, что запасы всех m поставщиков вывозятся полностью и имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\,, \quad i = 1, 2, \dots, m. \qquad (5.37)$$

Вторая группа из n уравнений выражает требование удовлетворить запросы всех n потребителей полностью и имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\,, \quad j = 1, 2, \dots, n. \qquad (5.38)$$

Учитывая условие неотрицательности объемов перевозок математическая модель выглядит следующим образом:

Математическая модель

$$Z(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min, \qquad 1$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\ i=1,2,\ldots,m, \qquad 2$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\ j=1,2,\ldots,n, \qquad 3$$

$$x_{ij}\ge 0,\ i=1,2,\ldots,m; j=1,2,\ldots,n. \qquad 4$$

В рассмотренной модели транспортной задачи предполагается, что суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей, т. е.:

$$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j \qquad (5.39)$$

Такая задача называется задачей с *правильным балансом*, а модель задачи *закрытой.* Если же это равенство не выполняется, то задача называется задачей с *неправильным балансом*, а модель задачи — *открытой.*

Математическая формулировка транспортной задачи такова: найти переменные задачи $X = (x_{ij})$, $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$, удовлетворяющие системе ограничений (цифра 2 в математической модели), (3), условиям неотрицательности (4) и обеспечивающие минимум целевой функции (1)

Пример 5.7. Составить математическую модель транспортной задачи, исходные данные которой приведены в таблице 5.11:

Таблица 5.11 — Исходные данные транспортной задачи

b_j / a_j	20	30	40
40	3	5	7
50	4	6	10

Решение:

1. *Вводим переменные задачи (матрицу перевозок):*

$$X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\end{pmatrix}.$$

2. *Записываем матрицу стоимостей:*

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

3. *Целевая функция задачи равняется сумме произведений всех соответствующих элементов матриц C и X.*

$$Z(X) = 3x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 4x_{21} + 6x_{22} + 10x_{23}.$$

Данная функция, определяющая суммарные затраты на все перевозки, должна достигать минимального значения.

4. *Составим систему ограничений задачи.*

Сумма всех перевозок, стоящих в первой строке матрицы X, должна равняться запасам первого поставщика, а сумма перевозок во второй строке матрицы X равняться запасам второго поставщика:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50.$$

Это означает, что запасы поставщиков вывозятся полностью.

Суммы перевозок, стоящих в каждом столбце матрицы X, должны быть равны запросам соответствующих потребителей:

$$x_{11} + x_{21} = 20,$$
$$x_{12} + x_{22} = 30,$$
$$x_{13} + x_{23} = 40.$$

Это означает, что запросы потребителей удовлетворяются полностью.

Необходимо также учитывать, что перевозки не могут быть отрицательными:

$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2, \dots m;\ j = 1, 2, \dots, n.$$

Ответ: Таким образом, математическая модель рассматриваемой задачи записывается следующим образом:

Найти переменные задачи, обеспечивающие минимум целевой функции (1) и удовлетворяющие системе ограничений (2) и условиям неотрицательности (3).

$$Z(X) = 3x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 4x_{21} + 6x_{22} + 10x_{23}; \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50, \\ x_{11} + x_{21} = 20, \\ x_{12} + x_{22} = 30, \\ x_{13} + x_{23} = 40 \end{cases} \quad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2, \dots m;\ j = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Бикмухаметов, И.Х.* Линейная алгебра : учеб. пособие / И.Х. Бикмухаметов, Г.Р. Гузаирова. — Уфа : Уфимский ф-л финансового ун-та, 2015.
2. *Гильмутдинов, Р.З.* Математические методы в экономике : учеб. пособие / Р.З. Гильмутдинов, Р.Р. Сафин. — Уфа : Уфимская гос. академия экономики и сервиса, 2009.
3. *Замков, О.О.* Математические методы в экономике: учебник / О.О. Замков, Ю.А.Черемных, А.В. Тостопятенко. — М. : МГУ, 2001.
4. *Красс, М.С.* Математика для экономистов : учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. — СПб. : Питер, 2006.
5. *Кремер, Н.Ш.* Высшая математика для экономистов : учебник / Н.Ш. Кремер и др. — М. : ЮНИТИ, 1999.
6. *Просветов, Г.И.* Математические методы в экономике : учебно-метод. пособие / Г.И. Просветов. — М. : Изд-во РДЛ, 2005.
7. *Пчелинцев, С.В.* Сборник задач по курсу «Математика в экономике» : В 3 ч. — Ч. 1 : Линейная алгебра, аналитическая геометрия и линейное программирование : учеб. пособие / С.В. Пчелинцев [и др.]; под ред. В.А. Бабайцева, В.Б. Гисина. — М. : Финансы и статистика, 2013 .
8. *Солодовников, А.С.* Математика в экономике. Ч. 1: Линейная алгебра, аналитическая геометрия и линейное программирование : учебник / А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов, И.Г.Шандра. — 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Финансы и статистика; ИНФРА-М, 2011.

ПРАКТИКУМ ПО ЛИНЕЙНОМУ ПРОГРАМИРОВАНИЮ

1. Решить графическим методом задачи с двумя переменными (табл. 1).
2. Решить графическим методом задачи с n переменными (табл. 2).
3. Составить двойственную задачу (см. табл. 2).
4. Решить симплексным методом задачи (табл. 3).
5. Решить методом потенциалов транспортные задачи (табл. 4).

Таблица 1 — Варианты задания 1

Вари-ант	Система уравнений	Вари-ант	Система уравнений
1	2	3	4
1	$Z(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max \; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 3x_2 \ge -9, \\ 4x_1 + 3x_2 \le 24, \end{cases}$	16	$Z(x) = 5x_1 + 5x_2 \to \max \; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \end{cases}$
2	$Z(x) = 5x_1 - 3x_2 \to \min \; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ $\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge 0, \\ -x_1 + x_2 \le 3, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6, \end{cases}$	17	$Z(x) = -x_1 - x_2 \to \max \; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 4, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ 4x_1 - x_2 \le 20, \end{cases}$
3	$Z(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max \; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ $\begin{cases} -6x_1 + x_2 \le 3, \\ -5x_1 + 9x_2 \le 45, \\ x_1 - 3x_2 \le 3, \end{cases}$	18	$Z(x) = 5x_1 + x_2 \to \min \; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 0, \\ -5x_1 + 9x_2 \le 45, \\ x_1 - 2x_2 \le 4, \end{cases}$
4	$Z(x) = 2x_1 + 2x_2 \to \max \; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 4, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ 4x_1 - x_2 \le 20, \end{cases}$	19	$Z(x) = 5x_1 - x_2 \to \max \; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1 - 3x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \end{cases}$
5	$Z(x) = 2x_1 + 4x_2 \to \max \; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1 - 3x_2 \le 5, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \end{cases}$	20	$Z(x) = -3x_1 - x_2 \to \min \; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ $\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge 0, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 + x_2 \le 3, \end{cases}$

1	2	3	4
6	$Z(x)=15x_1+10x_2 \to \max$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ $\begin{cases} 6x_1 - x_2 \geq 3, \\ -x_1+2x_2 \geq 8, \\ 3x_1+x_2 \leq 24, \\ x_1-x_2 \geq 3, \\ x_1+2x_2 \geq 2, \end{cases}$	21	$Z(x)=2x_1+3x_2 \to \max$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ $\begin{cases} x_1+2x_2 \geq 2, \\ x_1+x_2 \geq 2, \\ 2x_1+x_2 \geq 4, \\ 2x_1-3x_2 \geq 0, \end{cases}$
7	$Z(x)=3x_1+2x_2 \to \max$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ $\begin{cases} 3x_1-x_2 \geq 0, \\ x_1-x_2 \geq -2, \\ 4x_1-x_2 \leq 16, \\ 2x_1-x_2 \leq 6, \end{cases}$	22	$Z(x)=-x_1+6x_2 \to \max$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ $\begin{cases} 4x_1-5x_2 \geq 0, \\ 2x_1-3x_2 \leq 0, \\ 2x_1+3x_2 \geq 6, \\ 2x_1+x_2 \geq 2, \end{cases}$
8	$Z(x)=2x_1+5x_2 \to \max$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ $\begin{cases} 4x_1-5x_2 \geq 0, \\ 2x_1-3x_2 \leq 0, \\ 2x_1+3x_2 \geq 6, \\ 2x_1+x_2 \geq 2, \end{cases}$	23	$Z(x)=4x_1+6x_2 \to \min$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ $\begin{cases} 4x_1-5x_2 \geq 0, \\ 2x_1-3x_2 \leq 0, \\ 2x_1+3x_2 \geq 6, \\ 2x_1+x_2 \geq 2, \end{cases}$
9	$Z(x)=2x_1-x_2 \to \max$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ $\begin{cases} -x_1+x_2 \leq 2, \\ 2x_1+3x_2 \leq 16, \\ x_1+x_2 \leq 10, \\ 2x_1-x_2 \geq 8, \end{cases}$	24	$Z(x)=-x_1+4x_2 \to \min$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ $\begin{cases} 2x_1+3x_2 \geq 6, \\ -2x_1+3x_2 \leq 6, \\ x_1+x_2 \geq 3, \\ 2x_1-3x_2 \geq 0, \end{cases}$
10	$Z(x)=3x_1+2x_2 \to \max$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ $\begin{cases} 2x_1-x_2 \geq 0, \\ -x_1+2x_2 \leq 3, \\ x_2 \geq 6 \end{cases}$	25	$Z(x)=x_1-4x_2 \to \min$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ $\begin{cases} x_1-3x_2 \geq 0, \\ x_1-x_2 \leq 0, \\ 2x_1+x_2 \geq 6, \\ 2x_1+3x_2 \leq 18, \end{cases}$
11	$Z(x)=2x_1+4x_2 \to \min$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ $\begin{cases} 2x_1+x_2 \geq 9, \\ x_1+2x_2 \leq 15, \\ x_1+2x_2 \geq 9, \\ 2x_1+x_2 \geq 15, \end{cases}$	26	$Z(x)=-5x_1+x_2 \to \max$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ $\begin{cases} 2x_1-3x_2 \geq 0, \\ x_1+3x_2 \leq 9, \\ x_1-3x_2 \geq 3, \\ -x_1+3x_2 \leq 3, \end{cases}$

Окончание таблицы 1

1	2	3	4
12	$Z(x) = x_1 - 3x_2 \to \max \ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \ge 12, \\ 2x_1 - x_2 \le 6, \\ -x_1 + x_2 \ge 3, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \end{cases}$	27	$Z(x) = 4x_1 + 3x_2 \to \min \ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 0, \\ 2x_1 + x_2 \le 4, \\ 3x_1 - x_2 \ge 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12, \end{cases}$
13	$Z(x) = 3x_1 - x_2 \to \max \ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 \le 6, \\ x_2 \ge 6, \end{cases}$	28	$Z(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \min \ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 - x_2 \le 0, \\ 3x_1 + x_2 \ge 6, \\ 3x_1 - x_2 \ge 6, \end{cases}$
14	$Z(x) = x_1 - 2x_2 \to \min \ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge -2, \\ -x_1 + 2x_2 \le 7, \\ -4x_1 + 3x_2 \ge -12, \\ x_1 + 3x_2 \ge 18, \end{cases}$	29	$Z(x) = 3x_1 - x_2 \to \min \ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 4, \\ -x_1 + x_2 \le 2, \\ 3_1 - 2x_2 \ge 0, \\ x_1 - x_2 \le 0, \end{cases}$
15	$Z(x) = 3x_1 + 6x_2 \to \max \ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ $\begin{cases} -4x_1 + x_2 \ge 0, \\ x_1 - x_2 \ge -3, \\ 2x_1 - 3x_2 \ge 6, \end{cases}$	30	$Z(x) = 3x_1 + 4x_2 \to \max \ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ $\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge 0, \\ -x_1 + x_2 \le 3, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ 2x_1 - 5x_2 \ge 0, \end{cases}$

Таблица 2 — Варианты заданий 2 и 3.

Вари-ант	Система уравнений	Вари-ант	Система уравнений
1	2	3	4
1	$Z(x) = 2x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \min,$ $\begin{cases} 13x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 8, \\ -7x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2, \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3,4$	16	$Z(x) = 2x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$ $\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 = -2, \\ 5x_1 - 8x_2 - 3x_3 + x_4 = -1, \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3,4$

1	2	3	4
2	$Z(x)=2x_1+3x_2-x_3+4x_4\to\min,$ $\begin{cases}2x_1+3x_2+7x_4=21,\\-x_1-2x_2+x_3-5x_4=-12,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3,4$	17	$Z(x)=2x_1+5x_2+x_3+x_4\to\max,$ $\begin{cases}5x_1-2x_2-3x_3+x_4=1,\\3x_2+2x_3+x_4=6,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3,4$
3	$Z(x)=4x_1+13x_2+3x_3+6x_4\to\min,$ $\begin{cases}-5x_1+3x_2-x_3+2x_4=-1,\\9x_1-4x_2+2x_3-3x_4=6,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3,4$	18	$Z(x)=9x_1+2x_2+4x_3-8x_4\to\max,$ $\begin{cases}4x_1+3x_2+2x_3-7x_4=12,\\2x_1+2x_2+x_3-4x_4=4,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3,4$
4	$Z(x)=x_1+x_2+3x_3+4x_4\to\min,$ $\begin{cases}5x_1-6x_2+x_3-2x_4=2,\\11x_1-14x_2+2x_3-5x_4=2,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3,4$	19	$Z(x)=x_1-2x_2-x_3+3x_4\to\max,$ $\begin{cases}-4x_1+2x_2-x_3+x_4=2,\\-6x_1+6x_2-x_3+2x_4=10,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3,4$
5	$Z(x)=11x_2+x_3+4x_4\to\min,$ $\begin{cases}4x_1-5x_2+x_3-x_4=1,\\11x_1-11x_2+3x_3-2x_4=11,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3,4$	20	$Z(x)=2x_1+x_2-x_3-2x_4\to\min,$ $\begin{cases}2x_1+x_2-3x_3+x_4=6,\\x_1+x_2+2x_3-x_4=7,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3,4$
6	$Z(x)=4x_1+4x_2-3x_3+2x_4\to\min,$ $\begin{cases}2x_1+13x_2-4x_3+3x_4=19,\\3x_1+7x_2-x_3+2x_4=16,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3,4$	21	$Z(x)=2x_1+3x_2+6x_3-18x_4\to\min,$ $\begin{cases}-4x_1+6x_2-x_3+27x_4=-8,\\4x_1-14x_2+2x_3-5x_4=12,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3,4$
7	$Z(x)=12x_1+8x_2+5x_3+4x_4\to\min,$ $\begin{cases}-6x_1+x_2-x_3+2x_4=-2,\\11x_1-x_2+2x_3-3x_4=7,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3,4$	22	$Z(x)=3x_1-x_2-3x_3+x_4\to\max,$ $\begin{cases}2x_1-2x_2+3x_3+3x_4=9,\\-x_1+x_2-2x_3+x_4=-6,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3,4$

1	2	3	4
8	$Z(x)=x_1-19x_2-5x_3-7x_4\to\min,$ $\begin{cases}5x_1-4x_2+x_3-x_4=-1,\\-6x_1+7x_2-x_3+2x_4=10,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3,4$	23	$Z(x)=x_1-2x_2+3x_4\to\max,$ $\begin{cases}3x_1+x_2+x_3+x_4=10,\\2x_1-3x_2+x_3-2x_4=8,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3,4$
9	$Z(x)=7x_1+3x_2+3x_3+2x_4\to\min,$ $\begin{cases}-10x_1-x_2+2x_3+3x_4=-2,\\6x_1+2x_2+3x_3+x_4=18,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3,4$	24	$Z(x)=3x_1+3x_2+4x_3-6x_4\to\max,$ $\begin{cases}3x_1+x_2+x_3-x_4=3,\\x_1+x_2+2x_3-2x_4=4,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3,4$
10	$Z(x)=3x_1+4x_2+2x_3+7x_4\to\min,$ $\begin{cases}2x_1-x_2+10x_3-5x_4=10,\\-x_1+x_2-6x_3+4x_4=-2,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3,4$	25	$Z(x)=2x_1+10x_2+4x_3+2x_4\to\min,$ $\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3-2x_4=2,\\-x_1+x_2+x_3+x_4=3,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3,4$
11	$Z(x)=-22x_1+19x_2-5x_3-6x_4\to\max,$ $\begin{cases}4x_1-13x_2+7x_3-x_4=-1,\\-4x_1+18x_2-10x_3+2x_4=6,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3,4$	26	$Z(x)=2x_1+3x_2+4x_3-6x_4\to\max,$ $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+2x_4=8,\\2x_1+x_2+x_3+3x_4=6,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3,4$
12	$Z(x)=3x_1+2x_2+5x_3+4x_4\to\min,$ $\begin{cases}8x_1-7x_2+3x_3-2x_4=4,\\x_1+4x_2+2x_3+3x_4=20,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3,4$	27	$Z(x)=7x_1-10x_3+6x_4\to\min,$ $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3-2x_4=3,\\x_1-5x_2-5x_3+3x_4=8,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3,4$
13	$Z(x)=-2x_1+x_2+3x_3-2x_4\to\min,$ $\begin{cases}3x_1-x_2-4x_3+x_4=2\\5x_1-x_2-7x_3+2x_4=6,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3,4$	28	$Z(x)=2x_1+6x_2+4x_3+3x_4\to\max,$ $\begin{cases}2x_1+3x_2+2x_3+x_4=6,\\x_1+2x_2+x_3+x_4=4,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3,4$
14	$Z(x)=-2x_1+2x_2-3x_3-7x_4\to\min,$ $\begin{cases}-x_1-8x_2+x_3+6x_4=-2,\\3x_1+27x_2-4x_3-22x_4=-2,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3,4$	29	$Z(x)=-2x_1+6x_2-3x_3+6x_4\to\min,$ $\begin{cases}x_1+3x_2+3x_3+x_4=6,\\-2x_1+2x_2-x_3+2x_4=6,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3,4$

Окончание таблицы 2

1	2	3	4
15	$Z(x)=2x_1+x_2-4x_3+3x_4\to\max,$ $\begin{cases}-2x_1+3x_3-x_4=-2,\\3x_1+x_2-5x_3+2x_4=7,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3,4$	30	$Z(x)=4x_1+12x_2+4x_3+8x_4\to\max,$ $\begin{cases}x_1+4x_2+x_3+2x_4=12,\\2x_1+3x_2+3x_3+x_4=12,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3,4$

Таблица 3 — Варианты задания 4

Вари-ант	Система уравнений	Вари-ант	Система уравнений
1	2	3	4
1	$Z(x)=x_1+4x_2+x_3\to\max,$ $\begin{cases}-x_1-2x_2+x_3=4,\\3x_1+x_2+2x_3\le 9\\2x_1+3x_2+x_3+\ge 6\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3$	16	$Z(x)=-2x_1-2x_2+2x_3\to\min,$ $\begin{cases}x_1+x_2+x_3\le 4,\\x_1-x_2+x_3=2\\3x_1+x_2+2x_3\ge 6\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3$
2	$Z(x)=2x_1+x_2-x_3\to\min,$ $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3\ge 5,\\x_1+2x_2-x_3\le 7\\x_1-x_2+2x_3=1,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3$	17	$Z(x)=-3x_1-2x_2-2x_3\to\min$ $\begin{cases}x_1+x_2+x_3\ge 3\\x_1+x_3\le 2\\x_1-x_2+x_3=-1,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3$
3	$Z(x)=x_1-x_2+x_3\to\max,$ $\begin{cases}4x_1+2x_2+x_3\ge 6\\-x_1+x_2+x_3=1\\x_1-x_2+4x_3\le 24,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3$	18	$Z(x)=2x_1+8x_2+3x_3\to\min,$ $\begin{cases}3x_1+x_2+2x_3\ge 12,\\x_1+x_2+x_3=8\\2x_1-3x_2+x_3\ge -8\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3$
4	$Z(x)=5x_1+2x_2+x_3\to\max,$ $\begin{cases}x_1+x_2+x_3\ge 3,\\x_1+2x_2+2x_3=4\\3x_1+4x_2+2x_3\le 12,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3$	19	$Z(x)=6x_1+7x_2+9x_3\to\min,$ $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3\ge 5,\\-x_1+x_2+x_3=2\\-x_1-x_2+x_3\ge -2,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3$

1	2	3	4
5	$Z(x) = x_1 - 8x_2 - 3x_3 \to \max,$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + = 4 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \le -4, \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3$	20	$Z(x) = 5x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \ge 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 12, \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3$
6	$Z(x) = -x_1 - 3x_2 - x_3 \to \max,$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \ge 6, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \le -2, \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3$	21	$Z(x) = 6x_1 - x_2 + 3x_3 \to \max,$ $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 6, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \ge -7, \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3$
7	$Z(x) = x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \le 18, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 10, \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3$	22	$Z(x) = 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \max,$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 \ge -4, \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3$
8	$Z(x) = -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 \to \max,$ $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 8, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 \ge -4, \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3$	23	$Z(x) = x_1 + 3x_2 + x_3 \to \min,$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \ge 6, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \ge -6, \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3$
9	$Z(x) = 4x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max,$ $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 4, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \le 12, \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3$	24	$Z(x) = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \max,$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ -3x_1 - 6x_2 + 3x_3 \ge -5, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3$
10	$Z(x) = x_1 - 3x_2 - 2x_3 \to \max,$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 13, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 11, \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3$	25	$Z(x) = 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 \to \min,$ $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \ge 12, \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge -2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 24, \end{cases}$ $x_i \ge 0, i = 1,2,3$

1	2	3	4
11	$Z(x)=3x_1+2x_2+2x_3\to\min,$ $\begin{cases}3x_1+2x_2-2x_3\ge 11,\\ x_1-6x_2-3x_3=-23\\ -x_1+x_2-x_3\ge -2,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3$	26	$Z(x)=x_1+2x_2+2x_3\to\min,$ $\begin{cases}-x_1-x_2+4x_3\le -1,\\ x_1-2x_2+2x_3=2\\ x_1+2x_2-2x_3\le 6,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3$
12	$Z(x)=3x_1+2x_2+3x_3\to\max,$ $\begin{cases}-x_1-x_2+2x_3\le -2,\\ -x_1+2x_2+x_3\le 4\\ x_1+2x_3=2,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3$	27	$Z(x)=5x_1+7x_2+9x_3\to\max,$ $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=6,\\ x_1-2x_2-x_3\ge -8,\\ -2x_1+x_2+2x_3\ge 16,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3$
13	$Z(x)=x_1+2x_2+x_3\to\max,$ $\begin{cases}-x_1-x_2+x_3\le -1,\\ x_1+x_2+x_3=3\\ x_1+x_3\le 1,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3$	28	$Z(x)=x_1+x_2-4x_3\to\min,$ $\begin{cases}-x_1-3x_2+2x_3\le -3,\\ -x_1+2x_2+x_3\le 5\\ x_1-x_2-3x_3=7,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3$
14	$Z(x)=2x_1+x_2+2x_3\to\max,$ $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3\ge 2,\\ -2x_1+x_2+2x_3=2,\\ -2x_1-x_2+2x_3\ge -6,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3$	29	$Z(x)=3x_1+2x_2-3x_3\to\min,$ $\begin{cases}x_1-2x_2-x_3\le -6,\\ 2x_1-x_2+x_3\le 12\\ 2x_1-x_2-2x_3=3,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3$
15	$Z(x)=6x_1+7x_2+9x_3\to\min,$ $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3\ge 5,\\ x_1+x_2+x_3\ge 2\\ x_1+2x_2+6x_3\ge 4,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3$	30	$Z(x)=-3x_1+x_2+2x_3\to\max,$ $\begin{cases}-x_1+x_2+2x_3=2,\\ -x_1-x_3\ge -4\\ x_1+x_2+x_3\ge 6,\end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3$

Таблица 4 — Варианты задания 5

Вари-ант	Система уравнений						Вари-ант	Система уравнений					
1	2						3	4					
1	$a_i \backslash b_j$	10	10	25	25	30	16	$a_i \backslash b_j$	50	50	100	100	50
	10	1	5	7	9	3		50	3	4	6	5	13
	20	4	6	4	7	13		50	6	3	7	6	10
	10	1	5	3	4	9		100	10	5	2	2	6
	30	2	4	2	10	3		150	9	4	4	9	5
	10	3	2	5	6	4		100	3	2	4	2	3
2	$a_i \backslash b_j$	100	200	200	300	200	17	$a_i \backslash b_j$	200	200	400	200	100
	100	4	3	5	2	3		200	5	2	1	6	4
	200	7	1	2	3	1		300	6	2	4	4	6
	300	9	2	4	5	6		200	9	2	3	7	5
	100	1	3	6	4	10		200	7	3	5	8	7
	200	5	8	15	6	15		100	3	2	4	2	3
3	$a_i \backslash b_j$	200	400	100	200	100	18	$a_i \backslash b_j$	100	150	50	100	300
	200	1	7	12	2	5		50	3	4	5	4	1
	100	2	3	8	4	7		100	1	2	7	1	5
	200	3	5	4	6	9		150	4	6	6	3	7
	400	4	4	3	8	2		100	2	7	4	7	2
	400	5	3	7	10	1		200	3	8	9	4	5
4	$a_i \backslash b_j$	5	10	15	15	15	19	$a_i \backslash b_j$	400	600	500	400	500
	10	2	5	5	6	7		400	1	2	3	1	2
	5	4	3	4	4	3		500	3	4	2	4	5
	5	5	2	3	6	2		600	5	7	6	3	9
	10	3	6	5	7	8		400	4	10	15	4	8
	15	1	9	7	6	4		200	3	4	5	3	7
5	$a_i \backslash b_j$	10	30	30	30	40	20	$a_i \backslash b_j$	100	150	150	100	100
	10	3	1	3	4	3		50	3	4	5	4	6
	30	5	1	2	2	6		100	1	5	7	1	5
	60	2	3	4	1	1		150	4	6	6	3	4
	10	6	2	5	3	2		100	2	7	4	7	2
	60	3	7	4	4	1		100	1	9	6	3	2

Продолжение таблицы 4

1	2						3	4					
6	a_i \ b_j	20	20	40	40	40	21	a_i \ b_j	500	250	500	750	500
	20	4	5	2	4	3		250	3	1	8	1	4
	40	3	1	3	5	2		500	2	5	2	3	5
	80	2	7	6	8	6		750	9	4	6	5	7
	40	3	3	1	4	9		250	7	3	10	3	2
	20	1	6	9	2	7		500	6	6	4	7	8
7	a_i \ b_j	100	200	200	300	400	22	a_i \ b_j	300	900	600	900	300
	100	1	3	4	1	3		300	1	3	4	5	1
	200	5	4	5	7	5		600	9	5	2	4	8
	400	4	9	5	10	9		900	3	4	5	4	3
	200	7	7	5	8	13		600	5	7	2	6	6
	100	12	10	8	11	6		300	1	4	3	7	8
8	a_i \ b_j	200	200	300	300	100	23	a_i \ b_j	200	300	200	300	100
	300	4	6	3	4	1		100	1	3	4	5	1
	200	7	3	5	2	2		200	2	4	2	6	7
	100	5	3	2	4	4		300	6	5	4	5	4
	100	2	3	4	6	5		400	4	6	7	6	9
	200	1	4	4	3	3		400	5	7	6	9	8
9	a_i \ b_j	200	400	400	300	500	24	a_i \ b_j	50	150	200	150	100
	200	1	6	9	3	4		50	4	5	6	10	9
	400	3	2	2	4	5		100	6	3	8	4	3
	600	4	5	4	7	6		150	5	1	3	1	7
	200	1	4	3	9	8		150	7	2	4	2	3
	200	7	9	7	1	9		100	1	5	7	8	4
10	a_i \ b_j	150	200	200	400	200	25	a_i \ b_j	200	300	200	200	100
	150	1	4	7	2	4		200	1	5	1	1	5
	300	3	6	3	9	6		300	4	2	6	7	9
	250	4	8	12	2	5		100	3	4	5	6	5
	150	1	5	9	13	7		300	4	2	3	3	6
	200	2	3	4	6	5		300	6	2	3	5	4
11	a_i \ b_j	40	60	40	60	20	26	a_i \ b_j	100	200	200	100	200
	20	3	3	4	2	3		100	2	3	4	2	5
	40	1	2	1	5	3		200	3	1	1	3	1
	60	4	8	2	9	12		300	4	3	3	5	4
	40	5	7	9	6	5		200	5	1	2	6	7
	20	10	14	17	7	6		100	2	9	8	7	6

Окончание таблицы 4

1	2						3	4					
12	a_i b_j	300	200	300	100	400	27	a_i b_j	200	200	400	100	100
	300	3	4	3	1	5		200	2	2	3	1	2
	200	2	3	5	6	8		100	1	2	3	4	5
	100	1	2	3	3	4		200	4	3	6	5	8
	200	4	5	7	9	9		100	1	2	3	7	5
	300	5	6	8	4	7		200	4	3	5	7	6
13	a_i b_j	20	20	40	10	30	28	a_i b_j	50	100	100	200	200
	20	1	1	3	4	5		50	1	4	5	6	1
	10	2	3	4	2	6		100	2	2	2	5	5
	20	1	1	4	7	8		150	3	6	8	3	4
	30	5	6	3	4	7		200	4	7	9	4	8
	10	4	5	7	6	4		100	5	2	2	7	9
4	a_i b_j	200	300	400	200	300	29	a_i b_j	100	100	200	200	300
	200	1	3	4	2	5		300	1	2	3	4	8
	200	1	2	4	1	7		200	4	5	6	2	6
	300	3	4	5	9	9		100	1	1	3	4	5
	300	6	3	7	6	8		200	3	3	2	2	7
	100	5	6	7	3	4		300	5	6	7	8	10
	a_i b_j	300	150	300	150	250		a_i b_j	100	300	300	300	600
	150	2	1	3	1	5		300	4	2	2	5	3
	250	8	3	7	4	6		600	3	3	4	5	5
	250	6	4	9	3	4		100	1	2	3	4	6
	150	5	2	4	2	3		300	2	6	1	1	8
	150	4	6	2	3	4		600	3	4	5	5	9

Содержание

Учебное издание

Гильмутдинов Риф Забирович
Гузаирова Гузель Ринатовна

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ

Учебно-методическое пособие

*для студентов направлений прикладной информатики
и финансово-экономических специальностей*

Сдано в набор 28.05.2015. Подписано в печать 24.06.2015.
Бумага офсетная. Печать ризографическая.
Усл. печ. л. 5,11. Уч.-изд. л. 6,25. Тираж 150. Заказ 162

Башкирский институт социальных технологий (филиал)
Образовательного учреждения профсоюзов высшего образования
«Академия труда и социальных отношений» (г. Уфа)

450054, г. Уфа, просп. Октября, 74/2.
www: ufabist.ru

Отпечатано в типографии БИСТ (филиале) ОУП ВО «АТиСО»