БАШКИРСКИЙ ИНСТИТУТ СОЦИАЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ФИЛИАЛ)
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ПРОФСОЮЗОВ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«АКАДЕМИЯ ТРУДА И СОЦИАЛЬНЫХ ОТНОШЕНИЙ»

А.И. Быстров

ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ В ЭКОНОМИКЕ (БАЛАНСОВЫЕ ЗАДАЧИ)

Учебно-методическое пособие
для студентов
финансово-экономических и юридических специальностей

Уфа
2015

УДК 330.45
ББК 65в6
Б 95

Быстров, А.И.

Б 95 Информационные системы в экономике (балансовые задачи): учебно-методическое пособие для студентов финансово-экономических и юридических специальностей / А.И. Быстров; БИСТ (филиал) ОУП ВО «АТиСО». — Уфа: Изд-во Башкирского института социальных технологий (филиала) Образовательного учреждения профсоюзов высшего образования «Академия труда и социальных отношений (г. Уфа), 2015. — 90 с.

ISBN 978-5-904354-58-9

Учебно-методическое пособие разработано в соответствии с Федеральными Государственными образовательными стандартами высшего образования для различных дисциплин, связанных с решением прикладных задач информатики в экономике, теорией систем и системным анализом, созданием приложений для информационных систем в экономике, финансовой математикой для направления 09.03.03 «Прикладная информатика», математическим моделированием, информатикой для направлений 38.03.01 «Экономика», 38.03.02 «Менеджмент», информационных технологий в юридической деятельности для направления 40.03.03 «Юриспруденция».

Рассмотрены и использованы основные положения системного подхода при решении конкретных балансовых задач в финансово-экономической, юридической и технической сфере с использованием элементов матричной алгебры. Пособие включает основные разделы моделирования балансовых схем: необходимые знания для решения линейных систем алгебраических уравнений, системный подход при формировании структуры балансовых схем при решении финансовых и сырьевых задач в отраслях, государственных структурах и на производстве в перерабатывающей промышленности. Дана классификация моделей в экономической сфере. Показаны практические приемы решения экономических задач с использованием возможностей программирования в среде MS Excel. Отдельные материалы могут быть полезны аспирантам и преподавателям.

УДК 330.45
ББК 65в6

Рецензенты:
В.Н. Деменков, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник ГУП «Институт нефтехимпереработки» Республики Башкортостан;
Р.З. Гильмутдинов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Экономика, информатика и аудит» Башкирского института социальных технологий (филиала) Образовательного учреждения профсоюзов высшего образования «Академия труда и социальных отношений (г. Уфа)

ISBN 978-5-904354-58-9

Содержание

Введение ... 4

Глава 1. ФОРМИРОВАНИЕ БАЛАНСОВЫХ МОДЕЛЕЙ ... 24

1.1. Основы матричной алгебры ... 24
1.2. Обобщенный подход к решению балансовых задач в финансово-экономической и технической сфере ... 33

ГЛАВА 2. МОДЕЛИ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА, РАВНОВЕСНЫХ ЦЕН И МЕЖДУНАРОДНОЙ ТОРГОВЛИ ... 37

2.1. Линейная модель В. Леонтьева межотраслевого баланса ... 37
2.2. Модели равновесных цен ... 44
2.3. Модель международной торговли ... 46

Глава 3. ФИНАНСОВЫЕ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ БАЛАНСОВЫЕ МОДЕЛИ ... 49

3.1. Моделирование финансовых отношений между объектами. Прямая и обратная задачи ... 49
3.2. Моделирование аудита на предприятии ... 50
3.3. Моделирование балансовых схем переработки сырья на производстве ... 54
3.4. Моделирование переработки молочной продукции ... 55
3.4. Моделирование переработки сырья на нефтеперерабатывающем заводе ... 59

Глава 4. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ И САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ... 70

4.1. Практикум решения задач ... 70
4.2. Лабораторные работы и варианты заданий ... 78
4.3. Вопросы для самопроверки ... 84
4.4. Тестовые задания ... 84

Список литературы ... 88

ВВЕДЕНИЕ

Решая сложные многофакторные и многосвязные задачи при исследовании различных экономических явлений и процессов, нельзя обойтись без системного подхода. Основная задача системного подхода это при описании реальной экономической системы — выделение элементов системы с учетом их взаимосвязи. Основой анализа экономических явлений и процессов является создание экономико-математических моделей. Известны различные экономико-математические модели. На рисунке 1 представлены основные виды экономико-математических моделей по различным аспектам использования.

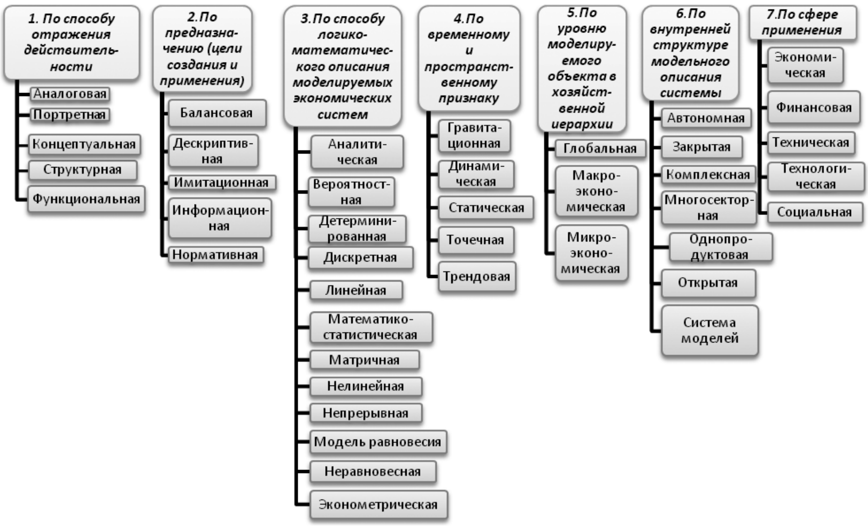


Рисунок 1 — Классификационная схема основных экономико-математических моделей

Перечислим и определим основные модели, представленные в схеме на рисунке 1.

1. ПО СПОСОБУ ОТРАЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОСТИ

АНАЛОГОВАЯ МОДЕЛЬ [analog model] — один из трех исходных типов моделей: модель, свойства которой определяются законами, аналогичными законам изучаемой системы.

ПОРТРЕТНАЯ МОДЕЛЬ [iconic model] (то же, что **иконическая модель**) — один из трех исходных типов моделей: модель, точно повторяющая структуру объекта и отношения между его элементами.

КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ [abstract model] — принципиальная основа экономико-математической модели, предназначенной для реализации различными математическими и техническими средствами и, следовательно, для непосредственного решения задачи. Это предварительное, приближенное представление о рассматриваемом объекте или процессе; часто К. м. имеет вид схемы, в которой фиксируются наиболее существенные параметры и связи между ними. На этом этапе ограничиваются обычно не количественными, а качественными категориями, т. е., например, отмечают, что такая-то переменная возрастает при убывании значений другой (а какова точно эта зависимость — будет выяснено на следующих стадиях разработки модели).

СТРУКТУРНАЯ МОДЕЛЬ [structural model] (СМ) — один из основных типов экономико-математических моделей (при их классификации по способам выражения соотношений между внешними условиями, внутренними параметрами и искомыми характеристиками) наряду с функциональными моделями. СМ отражает структуру системы, подлежащую исследованию, ее внутренние параметры, характеристики внешних возмущений.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ [functional models] (ФМ) — один из двух основных типов экономико-математических моделей (при их классификации по способам выражения соотношений между внешними условиями, внутренними параметрами и искомыми характеристиками моделируемого объекта) наряду со структурными моделями. ФМ описывает поведение системы безотносительно к ее внутренней структуре. Если обозначить входы и выходы моделируемого объекта соответственно через X и Y, то построить ФМ — это значит отыскать *оператор* D, связывающий X и Y, т. е. $Y = D(X)$.

При изучении ФМ возникают гипотезы о причинах тех или иных реакций объекта на воздействие внешней среды и, таким образом, открывается путь к анализу его структуры и формированию структурных моделей.

2. ПО ПРЕДНАЗНАЧЕНИЮ (ЦЕЛИ СОЗДАНИЯ И ПРИМЕНЕНИЯ) МОДЕЛИ

БАЛАНСОВАЯ МОДЕЛЬ [balance model] (БМ) —

1. Система уравнений (балансовых соотношений, балансовых уравнений), которые удовлетворяют требованию соответствия двух элементов: наличия ресурса и его использования (например, производства каждого продукта и потребности в нем, рабочей силы и количества рабочих мест, платежеспособного спроса населения и предложения товаров и услуг). Соответствие здесь понима-

ется либо как равенство, либо менее жестко — как достаточность ресурсов для покрытия потребности (и, следовательно, наличие некоторого резерва).

2. При описании экономической системы в целом — система уравнений, каждое из которых выражает требование баланса между производимым отдельными экономическими объектами количеством продукции и совокупной потребностью в этой продукции. Следовательно, в данном случае рассматриваемая система состоит из экономических объектов, каждый из которых выпускает некоторый продукт, частично потребляемый другими объектами системы, частично выводимый за ее пределы в качестве ее конечного продукта.

Важнейшие виды балансовых моделей: 1) **частные материальные, трудовые, финансовые балансы** для народного хозяйства и отдельных отраслей; 2) межотраслевые балансы страны в целом и регионов, а на уровне предприятий — матричные модели бизнес-планов.

Основная информация для БМ содержится в матрице коэффициентов затрат ресурсов на конкретные направления использования (например, в технологической матрице МОБ).

ДЕСКРИПТИВНАЯ МОДЕЛЬ [description model] — модель, предназначенная для описания и объяснения наблюдаемых фактов или прогноза поведения объектов (в отличие от нормативных моделей, предназначенных для нахождения желательного, например, оптимального состояния объекта).

ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ [simulator] (ИММ) — экономико-математическая модель изучаемой системы, предназначенная для использования в процессе машинной имитации. Она является по существу программой для компьютера, а эксперимент над ней состоит в наблюдении за результатами расчетов по этой программе при различных задаваемых значениях вводимых экзогенных переменных. ИММ является динамической моделью в том смысле, что в ней присутствует время — когда проигрывается серия вариантов развития исследуемого объекта. С другой стороны, ИММ, как правило, является адаптивной моделью, ибо совершенствуется, уточняется в процессе использования. Она может быть детерминированной, но чаще — вероятностной (т. е. содержащей стохастические элементы); часто она содержит наряду с машинными также блоки, где решения принимаются человеком.

ИНФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ [information model] (ИМ) —

1. Совокупность сигналов, несущих информацию об объекте управления и внешней среде, организованная по определенным правилам. Комбинации сигналов на мнемосхеме в кабинете директора, телевизионное изображение цеха, система математических формул и базы данных, характеризующих экономические процессы на предприятии, общее представление руководителя о структуре предприятия — все это ИМ разных типов, предназначенные для

различных задач, технических средств и методов управления. Словом, это вся сумма сведений, знаний об объекте управления, а также о задачах, которые предстоит решать лицу, принимающему решение.

2. Более узко: схема потоков информации, обращающейся в процессе управления объектом. Например, при создании автоматизированных систем управления (АСУ) формируется ИМ предприятия в виде графа — схемы, описывающей процедуры разработки плана и связи между ними (в том числе обратные связи). Это способствует упорядочению процессов управления, повышению гибкости информационных связей, оперативности и согласованности принятия решений на разных уровнях системы.

НОРМАТИВНАЯ МОДЕЛЬ [normative model] (или **прескриптивная**) — модель, предназначенная для нахождения желательного состояния объекта (например, оптимального). Поскольку желательное состояние должно быть реальным и исходить из возможностей развития системы, НМ должны сочетаться с дескриптивными (описательными) моделями.

3. ПО СПОСОБУ ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ МОДЕЛИРУЕМЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ [analytical model] — формула, представляющая математические зависимости в экономике и показывающая, что результаты (выходы) находятся в функциональной зависимости от затрат (входов). В самом общем виде ее можно записать так: $U = f(x)$, где x — совокупность (вектор) выходов; f — *зависимость*, которая записана в виде математической функции.

В моделях оптимизационных (а их большинство в экономико-математических исследованиях, в исследовании операций и т. д.) отыскивается такой вектор переменных x, при котором критерий, характеризующий качество функционирования системы (обычно это скаляр, а не вектор) получает наибольшее или наименьшее значение (либо вообще достигает какого-то желательного уровня). Это записывается, например, для первого случая (максимизации) так:

$$u = f(x, y) \rightarrow \max.$$

Здесь y — вектор переменных, не поддающихся управлению, но влияющих на u; f — функция, задающая отношения между всеми указанными величинами.

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ [stochastic, probabilistic model] —

1. Модель, которая в отличие от детерминированной модели содержит случайные элементы (величины). Таким образом, при задании на входе модели

некоторой совокупности значений, на ее выходе могут получаться различающиеся между собой результаты в зависимости от действия случайного фактора (помехи, неопределенность). Другое название ВМ — **стохастические модели.**

2. В математической статистике и теории вероятностей ВМ называют тип распределения вероятностей случайных признаков (нормальное, биномиальное, экспоненциальное).

ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ [deterministic model] — аналитическое представление закономерности, операции и т. п., при которых для данной совокупности входных значений на выходе системы может быть получен единственный результат. Такая модель может отображать как вероятностную систему (тогда она является некоторым ее упрощением), так и детерминированную систему.

ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ [discrete model] — экономико-математическая модель, все переменные и параметры которой являются дискретными величинами. Может отображать как дискретные системы, так и непрерывные системы, которые для этого приводятся к дискретному виду с помощью представления непрерывных величин в качестве дискретных (путем введения разного рода шкал, балльных оценок и т. п.).

ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ [linear model] (ЛМ) — модель, отображающая состояние или функционирование системы таким образом, что все взаимозависимости в ней принимаются линейными. Соответственно она может формулироваться в виде одного линейного уравнения или системы линейных уравнений. Причем в ряде случаев нелинейность взаимозависимостей может приводиться к линейной форме путем математических преобразований переменных: например, в нелинейных соотношениях

$$y = \alpha e^{\beta x}, y = \alpha x^{\beta},\ y = \alpha + \beta\frac{1}{x};$$

в первом и втором случаях логарифмирование обеих частей уравнений обеспечивает связь линейную в логарифмах $\ln y = \ln\alpha + \beta x$; $\ln y = \ln\alpha + \beta\ln x$, а в третьем — линейно зависимы y и $1/x$.

ЛМ, учитывающую стохастику, в общей форме можно записать так:

$$y_i = \alpha_i + \beta x + u_i.$$

В этой **регрессионной линейной модели** [linear regressive model] приняты следующие обозначения: свободный член α и вектор β — параметры; u — случайная ошибка, математическое ожидание которой равно нулю; x — вектор переменных x_i, идентифицированных как оказывающие воздействие на переменную y (т. е. управляющих переменных). Применяется также иная система обозначений: переменная величина X называется **объясняющей** (независимой) переменной; переменная Y — **объясняемой** (зависимой) переменной; u — **остаток**, равный разнице между между фактическими значениями и значениями модели. ЛМ в виде системы уравнений в общей форме записывается:

$$y_i = \alpha_i + Bx_i + u_i,$$

где y_i — зависимая переменная; $B \equiv [\beta_{ij}]$ — матрица параметров модели; x_i — вектор управляющих переменных в i-м уравнении.

МАТЕМАТИКО-СТАТИСТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ — модель, относящаяся к разделу математики, посвященному методам и правилам обработки и анализа статистических данных (т. е. сведений о числе объектов, обладающих определенными признаками, в какой-либо более или менее обширной совокупности) (МС). Сами методы и правила строятся безотносительно к тому, какие статистические данные обрабатываются (физические, экономические и др.), однако обращение с ними требует обязательного понимания сущности явления, изучаемого с помощью этих правил.

К экономике МС применима по той причине, что экономические данные часто представляют собой статистические сведения, т. е. сведения об однородных совокупностях объектов и явлений. Такими однородными совокупностями могут быть выпускаемые промышленностью изделия, персонал промышленности, данные о прибылях предприятий и т. д.

В настоящее время существуют разные определения сущности МС, и не следует удивляться, если вы увидите в одной книге, вопреки сказанному выше, утверждение, что МС — это “наука о принятии решений в условиях неопределенности”, а в другой — что это “наука, объясняющая данные статистических наблюдений при помощи вероятностных моделей”. Некоторые авторы считают, что МС — раздел теории вероятностей, а другие — что МС лишь связана с этой теорией, представляя собой отдельную науку. Наконец, распространено расширенное понимание предмета МС как охватывающей не только вероятностные аспекты, но и т. н. прикладную статистику (“**анализ данных**”), включающую и объекты не обязательно вероятностной природы.

В общем случае анализ статистических данных методами МС позволяет сделать два вывода: либо вынести искомое суждение о характере и свойствах этих данных или взаимосвязей между ними, либо доказать, что собранных данных недостаточно для такого суждения. Причем выводы могут делаться не из сплошного рассмотрения всей совокупности данных, а из ее выборки, как правило, случайной (последнее означает, что каждая единица, включенная в выборку, могла быть с равными шансами, т. е. с равной вероятностью, заменена любой другой).

Центральное понятие МС — случайная величина, это всякая наблюдаемая величина, изменяющаяся при повторениях общего комплекса условий, в которых она возникает. Если сам по себе набор, перечень значений этой величины неудобен для их изучения (поскольку их много), МС дает возможность получить необходимые сведения о случайной величине, зная существенно меньшее количество ее значений. Это объясняется тем, что статистические данные подчиняются таким законам распределения (или приводятся к ним порой искусственными приемами), которые характеризуются всего лишь несколькими параметрами, т. е. характеристиками. Зная их, можно получить столь же полное представление о значениях случайной величины, какое дается их подробным перечислением в очень длинной таблице. (Характеристиками распределения являются среднее, медиана, мода и т. д.)

Если изучаются взаимосвязи между значениями разных случайных величин, то необходимые сведения для этого дают коэффициенты корреляции между ними.

Когда совокупность анализируется по одному признаку, имеем дело с так называемой **одномерной статистикой**, когда же рассматривается несколько признаков — с многомерным статистическим анализом.

МС охватывает широкий круг одно- и многомерных методов и правил обработки статистических данных: от простых приемов статистического описания (выведение средней, а также степени и характера разброса исследуемых признаков вокруг нее, группировка данных по классам и сопоставление их характеристик и т. д.), правил отбора фактов при выборочном их рассмотрении до сложных методов исследования зависимостей между случайными величинами: выявление связей между ними — корреляционный анализ; оценка величины случайной переменной, если величина другой или других известна — регрессионный анализ; выявление наиболее важных скрытых факторов, влияющих на изучаемые величины, — факторный анализ; определение степени влияния отдельных неколичественных факторов на общие результаты их действия (например, в научном эксперименте) — дисперсионный анализ. Перечисленные области составляют основные дисциплины, входящие в МС К ним примыкают также быстро развивающиеся упоминавшиеся выше методы “анализа данных”, не основанные на традиционной для МС предпосылке вероятностной природы обрабатываемых данных.

Для экономических исследований большое значение имеет также анализ стохастических процессов, в т. ч. «Марковских процессов”.

Задачи МС в экономике можно разделить на пять основных типов:

1) оценка статистических данных;

2) сравнение этих данных с каким-то стандартом и между собой (оно применяется при эксперименте или, например, в контроле качества на предприятиях);

3) формирование групп данных и исследование связей между статистическими данными и их группами.

Эти три типа позволяют вынести суждение описательного характера об изучаемых явлениях, подверженных по каким-то причинам искажающим случайным воздействиям. Следующий четвертый, тип задач связан с нахождением наилучшего варианта измерения изучаемых данных. И наконец, пятый тип задач связан с проблемами предвидения и развития: здесь важное место занимают задачи анализа временных рядов.

Для экономики особенно ценно то, что МС позволяет на основании анализа течения событий в прошлом, т. е. изучения выбранных на определенные даты сведений о характерных чертах системы, предсказать вероятное развитие изучаемого явления в будущем (если не изменятся существенно внешние или внутренние условия).

В управлении хозяйственными и производственными процессами применяются различные математико-статистические методы. На них основаны многие методы исследования операций: методы теории массового обслуживания, позволяющие наиболее эффективно организовывать ряд процессов производства и обслуживания населения; методы теории расписаний, предназначенной для выработки оптимальной последовательности производственных, транспортных и других операций; методы теории решений, теории управления запасами, а также теории планирования эксперимента и выборочного контроля качества продукции; сетевые методы планирования и управления.

В эконометрических исследованиях на основе математико-статистической обработки данных строятся экономико-математические (экономико-статистические) модели экономических процессов, производятся экономические и технико-экономические прогнозы. Широкое распространение математико-статистических методов в общественном производстве, а также в других областях социально-экономической жизни общества (здравоохранение, экология, естественные науки) опирается на развитие электронно-вычислительной техники. Для решения типовых задач математико-статистической обработки данных созданы и применяются многочисленные стандартные прикладные компьютерные программы.

МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ [matrix models] — экономико-математические модели, построенные в виде таблиц (матриц). Они отображают соотношения между затратами на производство и его результатами, нормативы затрат, производственную и экономическую структуру хозяйства. Применяются в межотраслевом балансе, при решении отраслевых задач оптимального планирования развития и размещения производства, в эколого-экономическом моделировании и т. д.

Широкое распространение ММ связано, в частности, с тем, что запись данных в табличной форме облегчает их введение в компьютер и дает наглядное представление о результатах расчета (на самом деле ввиду большой размерности моделей они обычно не изображаются непосредственно в виде таблиц, а содержащаяся в них информация хранится в памяти ЭВМ). Для перехода между ММ различных звеньев (уровней хозяйства) применяются **вариантные матрицы.**

ММ применяются и в теоретических исследованиях экономики, поскольку она представляется как процесс преобразования затрат в результаты. Элементами матрицы при этом являются величины затрат при разных технологических способах. В таких исследованиях часто термин “матрица” отождествляется с термином “экономика”. Употребляют, например, в одном и том же смысле термины **“продуктивная матрица”** и **“продуктивная экономика”.**

НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ [nonlinear model] — экономико-математическая модель, отображающая состояние или функционирование системы (нелинейной системы, *стохастической системы*) таким образом, что все или некоторые взаимосвязи в ней принимаются нелинейными, т. е. не удовлетворяющими условиям линейности. Основная область применения нелинейных моделей — нелинейное программирование.

НЕПРЕРЫВНАЯ МОДЕЛЬ [continuous model] — экономико-математическая модель, которая содержит непрерывные показатели. Сравнивают с дискретной моделью.

МОДЕЛИ РАВНОВЕСИЯ [equilibrium models] — 1. Класс плановых моделей, реализующих композиционный подход. Соответственно, в таких моделях участники экономической системы рассматриваются как самостоятельно принимающие решения единицы, а оптимум всей системы находится путем согласования (“уравновешивания”) их интересов. Иными словами, здесь оптимальное состояние системы приравнивается к ее равновесию. Некоторые авторы, однако, считают нежелательным использовать в данном смысле термин “модели экономического равновесия” и предпочитают равнозначный, по их мнению, термин “модели экономического взаимодействия”. Примеры: Эрроу—Дебре модель, Межотраслевой баланс (МОБ) и др.

НЕРАВНОВЕСНАЯ МОДЕЛЬ [disequilibrium model] — экономико-математическая модель, описывающая (в отличие от моделей равновесия) экономическую систему, в которой не соблюдается равновесие: прежде всего, нет цен, уравновешивающих спрос и предложение ресурсов (**равновесных цен**);

отсюда такие явления, как дефицитность и избыточность продуктов и ресурсов. В моделях рассматриваются способы принятия рациональных решений в условиях неравновесия, преодоления указанных явлений путем, например, **натурального лимитирования** производства (установления **квот**), использования **штрафов** или **налогов.**

РЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ [regression model] — экономико-статистическая модель, основанная на уравнении регрессии, или системе регрессионных уравнений, связывающих величины экзогенных (входных, "объясняющих") и эндогенных (выходных) переменных.

СЕТЕВАЯ МОДЕЛЬ — модель топологическая, представляющая из себя сети, описываемые с помощью сетевых графиков. СЕТЕВОЙ ГРАФИК [activity network] (СГ) — граф типа сеть, в котором фиксируется комплекс работ (операций) и событий, отражая их технологическую последовательность и связь в процессе достижения цели; основной инструмент систем сетевого планирования и управления.

Пример СГ дан на рис.2. В кружках здесь указаны номера событий, стрелки означают работы, а цифры над ними называются *временными оценками*: они показывают ориентировочную продолжительность работ.

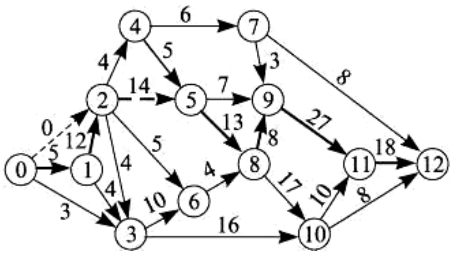


Рисунок 2 — Сетевой график

Утолщенными стрелками выделен критический путь.

Разработка СГ сложного комплекса работ (например, сооружения завода, проектирования космической системы и т. п.) проходит ряд этапов: составление подробного перечня работ и установление их необходимой последовательности, а также учет имеющихся ресурсов, составление на этой основе "частичных" графиков отдельных организаций, участвующих в комплексе; **"сшивание"** общего СГ путем объединения частичных; уточнение первоначального графика (включение неучтенных работ, укрупнение при необходимости некоторых сложных работ и т. д.).

В процессе использования СГ он претерпевает изменения, оптимизируется. Регулярно определяется критический путь, и производятся необходимые (для ускорения работ) переброски ресурсов.

ЧИСЛОВАЯ МОДЕЛЬ [numerical model] (ЧМ) — экономико-математическая модель, основными элементами которой являются конкретные численные значения характеристик моделируемой системы, объекта. Официальная экономическая наука в СССР испытывала, в частности, большое влияние ЧМ общественного воспроизводства, разработанных К. Марксом и В.И. Лениным.

ЭКОНОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ [econometric model] (ЭМ) — основное понятие эконометрии, экономико-математическая модель, параметры которой оцениваются с помощью методов математической статистики. Она выступает в качестве средства анализа и прогнозирования конкретных экономических процессов как на макро-, так и на микроэкономическом уровне на основе реальной статистической информации. Наиболее распространены ЭМ, представляющие собой системы регрессионных уравнений, в которых отражается зависимость эндогенных величин (искомых) от внешних воздействий (**текущих экзогенных величин**) в условиях, описываемых параметрами модели, а также лаговыми переменными. Кроме регрессионных (как линейных, так и нелинейных) уравнений, применяются и другие математико-статистические модели.

ЭМ может быть представлена в двух формах: *структурной* и *приведенной.*

В наиболее общем виде любую ЭМ, построенную в виде системы линейных уравнений, можно записать так:

$$y(t) = Ay(t) + \sum_{I=1}^{p} Zy(t-I) + Cx(t),$$

где y — вектор текущих значений эндогенных переменных модели; A — матрица коэффициентов взаимодействий между текущими значениями эндогенных переменных модели; Z — матрица коэффициентов влияния запаздывающих (лаговых) переменных модели на текущие значения эндогенных и моделируемых показателей; C — матрица коэффициентов внешних воздействий; x — вектор значений экзогенных показателей модели; t— индекс временного периода; I — индекс запаздывания (лага); p — продолжительность максимального лага.

В литературе подобные системы часто называют **системами одновременных уравнений,** имея в виду, что здесь **зависимая переменная** одного уравнения может появляться одновременно в виде переменной (но уже в качестве **независимой**) в одном или нескольких других уравнениях. В таком случае теряет смысл традиционное различение зависимых и независимых переменных.

Вместо этого устанавливается различие между двумя видами переменных. Это, во-первых, **совместно зависимые переменные** (эндогенные), влияние которых друг на друга должно быть исследовано (матрица A в слагаемом $Ay(t)$ приведенной выше системы уравнений). Во-вторых, **предопределенные переменные**, которые, как предполагается, оказывают влияние на первые, однако не испытывают их воздействия; это переменные с запаздыванием, т. е. лаговые (второе слагаемое) и определенные вне данной системы уравнений экзогенные переменные.

Экзогенными, например, всегда оказываются показатели климатических условий, если они включаются в модель. В то же время многие экономические переменные в зависимости от задач и структуры модели могут относиться и к эндогенным, и к экзогенным.

Понятие одновременных эконометрических уравнений и методы их решения были впервые предложены норвежским экономистом Т. Хаавельмо, лауреатом Нобелевской премии по экономике.

В зависимости от характера ограничений и статистической структуры переменных эконометрические модели классифицируются на линейные модели с одной, двумя и большим числом переменных, а также на пробит-модели, логит-модели, тобит-модели и др.

МОДЕЛИ ДИСКРЕТНОГО ВЫБОРА [discrete choice models] (МД) (иначе называемые **моделями качественного отклика** [qualitative response models]) — определяют вероятностное распределение дискретных зависимых переменных как функцию независимых переменных и неизвестных параметров. Их применение в эконометрике определяется тем, что решение экономического субъекта часто включает дискретный выбор (например, решение поступать на работу или не поступать, выбор занятия, выбор маршрута перевозки груза и т. п.). В каком-то смысле эти модели противоположны агрегированным макроэкономическим моделям, которые описывают массовые, а не индивидуальные факты. В разных постановках МД в качестве математического аппарата применяются *цепи Маркова*, модели с бинарными переменными, многомерные модели (совместное распределение вероятностей для двух или большего числа дискретных зависимых переменных), случайные выборки и др.

МОДЕЛИ НЕПРЕРЫВНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ [continuous time duration models] (иначе: **модели выживания** [survival models]) — эконометрические модели, используемые при анализе таких явлений, как продолжительность безработицы (периода, проходящего от потери одного рабочего места и занятия другого) или продолжительность состояния супругов в браке.

ЛОГИТ-МОДЕЛЬ [logit-model] — эконометрическая модель, относящаяся к классу таких моделей, для анализа которых неприменимы обычные методы регрессионного анализа (например, Пробит-модель, Тобит-модель). Отличие ее состоит в том, что в ней зависимая переменная может принимать лишь ограниченное число значений, в простейшем случае — либо 0, либо 1. Задача состоит в том, чтобы определить вероятность принятия зависимой переменной значения 0 или 1. Здесь в качестве аналитического средства применяется логистическая функция (выраженная в логарифмической форме) — отсюда и название.

ПРОБИТ-МОДЕЛИ [probit-models] — вид эконометрических моделей, которые не поддаются исследованию стандартными методами регрессионного анализа, поскольку содержат дихотомические переменные (“все или ничего”). Примеры — модели принятия решений: владеть собственностью или арендовать ее, модели выбора маршрута путешествия или выбора профессии.

ТОБИТ-МОДЕЛИ [tobit-models] — один из видов эконометрических моделей, не поддающихся исследованию стандартными методами регрессионного анализа, поскольку включают переменные, представляющие собой смесь дискретных и непрерывных величин. Например, таковы модели рынков, на которых часть цен лимитированы, а часть — свободны.

4. ПО ВРЕМЕННОМУ И ПРОСТРАНСТВЕННОМУ ПРИЗНАКУ

ГРАВИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ [gravity model] (ГМ) — модель взаимодействия между пространственными объектами (городами, регионами, странами) в региональном анализе и пространственном анализе экономики. В различных модификациях такие же модели используются при исследовании процессов урбанизации, размещения промышленности, экспортно-импортных взаимосвязей, миграции населения. Общая черта этих моделей заключается в том, что сила взаимодействия (интенсивность потоков) в них зависит от значимости (величины) объектов и расстояния между ними. Соответственно, общая форма ГМ такова:

$$I_{ij} = \frac{A \cdot P_j^{\alpha} \cdot P_i^{\beta}}{D_{ij}^{\gamma}},$$

где I_{ij} — объем взаимодействия между объектами i и j; A — коэффициент соответствия; P — некоторая мера значимости объекта (например, численность населения города i — P_i и города (j — P_j)); D_{ij} — расстояние между ними; степенные показатели α, β, γ — параметры модели.

Легко заметить, что приведенная формула аналогична физической формуле притяжения между телами: отсюда и название — “Гравитационная модель”.

Такие модели применяются при исследовании товарных потоков между парами стран. В них учитываются социально-экономические факторы, определяются экспортные возможности и импортные потребности торговых партнеров, факторы, относящиеся к продвижению товарного потока (расстояние, наличие таможенных барьеров и т. п.).

Адекватность ГМ, экономическая обоснованность их применения оспаривается рядом специалистов.

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ [dynamic economic models] (ДМЭ) — модели, описывающие экономику в развитии (в отличие от статических, характеризующих ее состояние в определенный момент). Модель является динамической, если, как минимум, одна ее переменная относится к периоду времени, отличному от времени, к которому отнесены другие переменные.

Существуют два принципиально различных подхода к построению таких моделей. Первый подход — оптимизационный. Он состоит в выборе из числа возможных траекторий (путей) экономического развития оптимальной траектории (например, обеспечивающей наибольший объем фонда потребления за плановый период). Второй подход заключается в исследовании равновесия в экономической системе. В этом случае, переходя к экономической динамике, используют понятие “равновесная траектория” (т. е. уравновешенный, сбалансированный экономический рост), которая представляет собой результат взаимодействия множества ячеек экономической системы.

В общем виде ДМЭ сводятся к описанию следующих экономических явлений: начального состояния экономики, технологических способов производства (каждый “способ” говорит о том, что из набора ресурсов x можно в течение единицы времени произвести набор продуктов y), а также (при первом из названных подходов) — критерия оптимальности.

Используемые в реальной ДМЭ временные ряды содержат три элемента — тренд, сезонные переменные (сезонные колебания) и случайную переменную (остаток); во многих моделях рыночной экономики выделяется еще одна составляющая — циклическая. В качестве экзогенных величин могут выступать, например, выявленные статистическим путем макроэкономические зависимости, сведения о демографических процессах и т. п.; в качестве эндогенных величин — темпы роста, показатели экономической эффективности и др.

Математическое описание ДМЭ производится с помощью систем дифференциальных уравнений (в моделях с непрерывным временем), разностных уравнений (в моделях с дискретным временем), а также систем обыкновенных алгебраических уравнений.

С помощью ДМЭ решаются, в частности, следующие задачи планирования и прогнозирования экономических процессов: определение траектории экономической системы, ее состояний в заданные моменты времени, анализ системы на устойчивость, анализ структурных сдвигов.

С точки зрения теоретического анализа большое значение приобрели динамическая модель фон Неймана и так называемые теоремы о магистралях.

Что же касается практического применения ДМЭ, то оно находится еще в начальной стадии: расчеты по модели, хотя бы сколько-нибудь приближающейся к реальности, чрезвычайно сложны. Но развитие в этом направлении продолжается. Используются, в частности, многоотраслевые (многосекторные) динамические модели развития экономики.

СТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ [static model] — экономико-математическая модель, в которой все зависимости отнесены к одному моменту времени. Такими моделями могут описываться статические системы, но также и динамические системы — путем характеристики их состояния в заданный момент.

ТОЧЕЧНАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИКИ (“ТОЧЕЧНАЯ ЭКОНОМИКА”) [point economic model] — упрощенная модель экономической системы без учета процессов транспортировки, связанных с тем, что хозяйство распределено по территории страны. Это бывает удобно для плановых расчетов и, особенно в теоретических исследованиях экономики.

ТРЕНДОВАЯ МОДЕЛЬ [trend model] — динамическая модель, в которой развитие моделируемой экономической системы отражается через тренд ее основных показателей (в частности, тренд средних величин этих показателей, их дисперсии, минимальных или максимальных уровней).

5. ПО УРОВНЮ МОДЕЛИРУЕМОГО ОБЪЕКТА В ХОЗЯЙСТВЕННОЙ ИЕРАРХИИ

ГЛОБАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ [global models] —

1. Распространенное (но не совсем точное, поскольку определение “глобальный” уместнее для значения 2, приведенного ниже) название наиболее общих для отдельной страны экономико-математических моделей, когда они представляют собой верхний уровень системы моделей народного хозяйства. Лучше было бы назвать их общими, или сводными, моделями.

2. Модели, отражающие процессы глобального характера (например, модели Римского клуба).

МАКРОЭКОНОМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ [macroeconomic aggregative model] (то же: **макромодель**, **агрегированная, агрегатная модель**) — экономико-математическая модель, отражающая функционирование народного хозяйства как единого целого. Макромодели оперируют крупноагрегированными, как правило, стоимостными показателями — агрегатами (например, валовой национальный продукт, валовые капиталовложения и др.).

Четкого отграничения макромоделей от микромоделей пока нет. Безусловно, лишь, что к первым относятся наиболее обобщенные глобальные модели. Что же касается моделей, в которых учитывается членение народного хозяйства на крупные подсистемы, напр. секторы (подразделения общественного производства), отрасли и регионы, то одни авторы относят их к микромоделям, другие — к макромоделям.

Макромодели используются для теоретического анализа наиболее общих закономерностей функционирования и развития народного хозяйства. Например, агрегированные теоретико-аналитические модели теории экономического роста.

Важным полем применения ММ является прогнозирование народнохозяйственных процессов. Для этого применяются макроэкономические производственные функции, модели оптимизации соотношения нормы накопления и нормы потребления в национальном доходе и др. На Западе среди используемых для прогнозирования **макроэконометрических моделей** наиболее известны модели: Клейна-Голдбергера, Брукингская, Уортонская в США; хозяйственного развития Голландии; Канадская модель.

По характеру зависимостей макромодели (как и всякие модели) могут быть детерминированными и вероятностными (стохастическими), по роли временного фактора — статическими и динамическими, по представлению переменных (включая переменную времени) — дискретными и непрерывными.

МИКРОЭКОНОМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ [microeconomic model] — экономико-математическая модель, отражающая функционирование и структуру отдельного элемента экономической системы, взаимодействие его с другими элементами системы в процессе ее функционирования. Четкого отграничения микромоделей от макромоделей нет. Как правило, этот термин относят к изучению деятельности таких ведущих звеньев экономики, как домашнее хозяйство (потребитель) и фирма (производитель). Домашнее хозяйство стремится к максимизации полезности, фирма — к максимизации прибыли. Соответственно, к ММ относят, например, модели спроса и потребления, поведения фирмы, ценообразования, рынка товаров, рынка капиталов и других частных рынков.

ММ описывает поведение конкретных экономических объектов (вплоть до отдельной личности — потребителя или производителя), принимающих решения (осуществляющих выбор возможных альтернатив) в условиях функционирования социально-экономической системы. Каждый объект получает, или покупает, или добывает каким-то иным путем нужную ему информацию, распределяет имеющиеся ресурсы, разрабатывает правила выбора альтернатив и стратегию дальнейших действий и т. д. Исходя из этого, можно выделить три существенные области применения ММ: ценообразование, принятие решений об объеме производства и продаж, распределение доходов. Отличие ММ от макромоделей: большая зависимость от внешней среды, дезагрегация показателей. Так же как и макроэкономические модели, микромодели могут быть статическими и динамическими, детерминированными и вероятностными, дискретными и непрерывными.

6. ПО ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРЕ МОДЕЛЬНОГО ОПИСАНИЯ СИСТЕМЫ

АВТОНОМНАЯ МОДЕЛЬ [autonomous model] — часть системы моделей, которую можно анализировать независимо от других частей. Например, модель предприятия в системе моделей АСУ отрасли, концерна или иного объединения предприятий. Подобный подход применим всюду, где отдельные хозяйственные звенья обладают самостоятельностью в своих действиях. Однако автономность частичных моделей всегда относительна.

ЗАКРЫТАЯ МОДЕЛЬ [closed model] — модель, у которой нет входов и выходов (либо они признаются неизменными и потому не принимаются во внимание при анализе). Таким образом, система, которая моделируется, принимается как бы изолированной от внешней среды (такая система называется **замкнутой** или **закрытой**). Естественно, что на самом деле у всякой страны есть экспорт, импорт, т. е. ее экономика тесно связана с внешней природной средой и т. д., да и вообще, любая экономическая система не замкнута, а открыта. Однако понятие З. м. применяется как научная абстракция, помогающая изучать закономерности реальной экономики. Поведение такой упрощенной модели определяется не внешними факторами, а только начальным состоянием и внутренними закономерностями развития моделируемой системы.

КОМПЛЕКС МОДЕЛЕЙ [set of models] (КМ) — совокупность моделей, предназначенных для решения одной сложной задачи, каждая из которых описывает ту или иную сторону моделируемого объекта либо процесса на своем соответствующем этой стороне “языке”. например, материально-вещественные аспекты отражаются в показателях натуральных объемов сырья, полуфабрикатов, продукции; финансовые аспекты — в ценностных показателях; трудовые — в трудовых. Если же модели связаны так, что результаты одних оказываются исходными данными для других и т. д. (более того, результаты решения последующих задач могут потребовать перерешения предшествующих, т. е. действуют обратные связи) до получения общего результата, то КМ обращается в систему моделей.

МНОГОСЕКТОРНАЯ МОДЕЛЬ [multisector model] — модель народного хозяйства, представляющая его как совокупность крупных секторов. Ими могут быть, например, производство средств производства и производство предметов потребления, и тогда перед нами двухсекторная модель. Выделяют, кроме того, такие секторы, как государственный, кооперативный, частный.

Если в качестве секторов принимаются отрасли производства, то такая модель называется **многоотраслевой.** В ряде теоретических моделей каждая отрасль как бы производит один обобщенный продукт (например, машиностроение — машины, т. е. активную часть основных фондов, строительство — их пассивную часть (сооружения), сельское хозяйство — продовольствие и т. п.). Соответствующую модель называют **многопродуктовой.**

ОДНОПРОДУКТОВАЯ МОДЕЛЬ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА [single-product model] — экономико-математическая модель, в которой хозяйство рассматривается как производство одного обобщенного продукта, часть которого идет на потребление, часть — на увеличение основных и оборотных фондов. Исследование подобной крайне упрощенной модели позволяет все же изучать наиболее общие закономерности развития экономики (тем более что и в реальности такой единственный "продукт" существует — это деньги). Ей противопоставляется многосекторная (или *многоотраслевая*) модель, в которой хозяйство делится на несколько секторов (например, государственный и кооперативный) или отраслей и изучается их взаимодействие, обмен ресурсами и продуктами между ними. Наряду с указанным термином применяются в том же смысле **односекторная модель, одноотраслевая модель.**

ОТКРЫТАЯ МОДЕЛЬ [open model] (ОМ) — модель, в которой учитывается взаимодействие моделируемого объекта с окружающей средой (внешние связи), в отличие от закрытой модели, где такие связи не принимаются во внимание. Например, в ОМ экономики страны вводятся показатели, характеризующие ее экспорт и импорт, или, скажем, такие внешние связи, как туризм, вывоз капиталов. Чем модель более открыта, тем больше число возможных вариантов ее поведения, тем шире, следовательно, область допустимых решений при планировании и вообще — при принятии управляющих решений.

Существуют ОМ народного хозяйства, в которых предполагается, что конечное потребление находится вне изучаемой сферы. В них конечные продукты как бы экспортируются потребителям (т. е. выводятся за пределы модели).

СИСТЕМА МОДЕЛЕЙ [system of models, large-scale economic model, multimodel system] (СМ) — совокупность взаимно связанных экономико-математических моделей для описания сложных экономических систем, которые невозможно воспроизвести в одной модели, достаточно детализированной для практических целей, так как она была бы слишком громоздкой. Поэтому для планирования и прогнозирования экономики крупнейших хозяйственных объектов разрабатываются СМ, построенные обычно по иерархическому принципу, в несколько уровней — они называются **многоуровневыми системами.**

В СССР был разработан и в той или иной мере опробован на практике, в частности, в автоматизированной системе плановых расчетов (АСПР), ряд крупных СМ. Среди них — предложенные Институтом экономики и организации промышленного производства СО АН СССР СМ оптимального территориально-производственного планирования, ЦЭМИ АН СССР — СМ многоступенчатой оптимизации экономики (включая межотраслевую модель, модели оптимизации многоотраслевых комплексов и ряд отраслевых моделей); Советом по изучению производительных сил при Госплане СССР — СМ размещения производства ведущих отраслей народного хозяйства; НИЭИ латвийского Госплана — СМ прогнозирования и планирования народного хозяйства республики; ЦЭМИ АН СССР — СМ оценки, анализа и прогноза народного благосостояния и др.

Среди разработанных к настоящему времени многоуровневых систем большинство имеют два уровня: верхний (народного хозяйства в целом) и нижний — отраслевой или региональный (в зависимости от типа системы).

Производственная программа отдельного предприятия тоже может рассчитываться с помощью СМ: она включит модели расчета общезаводских показателей на верхнем уровне, показателей отдельных цехов — на следующем и т. д.

СМ создает возможность для самостоятельного решения отдельных планово-экономических задач и их последующего согласования. Расчеты проводятся так, что результаты (выходы) расчетов по одной модели оказываются входами для других и т. д. Есть два основных способа связи моделей в системе — алгоритмический и *неформальный,* когда процесс согласования результатов производится людьми.

Следует различать понятия “СМ” и “комплекс моделей”. В последнем случае разные модели отражают в разных “языках” разные стороны исследуемого объекта (например, трудовые, финансовые, материальные потоки), но не связаны так, чтобы можно было получить из их решения общий результат (например, оптимальный план хозяйственного объекта).

7. ПО СФЕРЕ ПРИМЕНЕНИЯ

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ [*economic model*] — математическое описание экономического процесса или объекта, произведенное в целях их исследования и управления ими.

ФИНАНСОВАЯ МОДЕЛЬ [*finance model***]** (ФМ) — это модель, описывающая финансовые процессы. В финансовой математике ФМ можно назвать любой финансовый инструмент, бизнес-план, инвестиционный проект и т. д. ФМ может быть реализована с помощью математических моделей, отражающих суть кредитно-финансовых операций.

ТЕХНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ [*technical model***]** — система объектов (предметов или знаков), воспроизводящих некоторые существенные свойства моделируемого технического объекта.

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ [*technologic model***]** — это модель, основанная на предметно практической деятельности и целостно описывающая связи и закономерности технологических взаимодействий технического объекта и предметных форм вещества, энергии и информации.

СОЦИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ [*social model***]** — это такое устройство общества, которое имеет достаточный набор социальных ролей, для решения какого-либо конфликта (ситуации пересечения интересов социальных групп или их представителей), возникающего в обществе.

Эта информация относительно экономических моделей приведена для общего представления и ознакомления студентов со всем многообразием существующих экономических моделей. Она будет полезна также для выбора той или иной модели при решении конкретных экономических задач.

В настоящем учебном пособии мы более подробно рассмотрим балансовые модели.

ГЛАВА 1. ФОРМИРОВАНИЕ БАЛАНСОВЫХ МОДЕЛЕЙ

При постановке и решении многих задач в финансово-экономической и технической сфере используется системный подход. Выбирается система объектов, достаточных для математического моделирования соответствующих систем, содержащих эти объекты. Устанавливаются взаимосвязи этих объектов в выбранной системе, определяются зависимые и независимые параметры системы. То есть известны количественно некоторые характеристики объектов системы, а некоторые необходимо определить с учетом выполнения условий взаимодействия объектов в общей балансовой схеме. Чаще всего балансовые системы представляются в виде систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Иначе говоря, линейные балансовые модели в экономике часто сводятся к решению, соответствующих постановке задачи СЛАУ. В случае, когда количество неизвестных больше числа уравнений переходят к системам неравенств и определяют область допустимых решений. Когда количество неизвестных меньше числа уравнений для получения приближенного решения используют метод наименьших квадратов. Для учета динамики в балансовых схемах учитывают зависимость параметров системы от времени, то есть решают систему дифференциальных уравнений.

1.1. ОСНОВЫ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ

Для решения систем алгебраических линейных уравнений, отражающих статические балансовые модели, необходимо знать основные понятия матричной алгебры.

МАТРИЦЫ. ВИДЫ МАТРИЦ

Матрицей размера $m \cdot n$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и m столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются элементами матриц.

Матрицы обозначаются заглавными буквами латинского алфавита, например A, B, C…, а для обозначения элементов используются строчные буквы с двойной индексацией: a_{ij}, где i — номер строки, а j — номер столбца. Если есть необходимость указывать размер матрицы, то матрицу A размера $m \cdot n$ записывают так:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

или в сокращенной форме: $A=(a_{ij})$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Две матрицы A и B одинакового размера называются равными, если $a_{ij}=b_{ij}$ для любых $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Матрицы вида $A_{1\times n}$ и $A_{m\times 1}$ называются соответственно матрицей-строкой и матрицей-столбцом.

Матрица A называется квадратной n-го порядка, если число ее строк равно числу столбцов, т. е. $m = n$. Элементы a_{ii} называются диагональными. Если диагональные элементы равны 1, все остальные равны нулю, то такая матрица называется единичной и обозначается буквой E. Например, $E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ — единичная матрица третьего порядка.

Матрица любого размера называется единичной матрицей или нуль матрицей, если все ее элементы равны 0:

$$O_{m\times n}=\begin{pmatrix}0 & 0 & ... & 0\\ 0 & 0 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & 0\end{pmatrix} \qquad (1.2)$$

ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

Над матрицами, как и над числами, можно производить ряд операций, причем некоторые из них аналогичны операциям над числами, а некоторые специфические.

1) *Умножение матрицы на число*. Произведением матрицы A на число λ называется матрица $B = \lambda A$, элементы которой $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ для $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. Например, если $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, то $5A=\begin{pmatrix}10 & 15\\ 5 & -10\end{pmatrix}$. Следствие: общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

Например, $\begin{pmatrix}12 & 6 & -9\\ 3 & 12 & 15\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}4 & 2 & -3\\ 1 & 4 & 5\end{pmatrix}$.

2) *Сложение матриц*. Суммой двух матриц A и B одинакового размера $m\times n$ называется матрица $C = A + B$, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для $i=\overline{1,m}$,

$j=\overline{1,n}$. Например, $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&3&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&4&1\end{pmatrix}$, $C=A+B=\begin{pmatrix}2&2&-1\\1&7&6\end{pmatrix}$.

$A + 0 = A$, где 0 — нулевая матрица.

3) *Вычитание матриц*. $A - B = A + (-1)B$.

4) *Умножение матриц*. Умножение матрицы A на матрицу B возможно, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. $A_{n\times k}\cdot B_{k\times m}=C_{n\times m}$, где $c_{ij}=\sum_{p=1}^{k}a_{ip}b_{pj}$. Например, $A_{2\times 3}=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0&1\\5&1&4\\-2&0&1\end{pmatrix}$. Произведение равно

$$C_{2\times 3}=A\cdot B=\begin{pmatrix}1\cdot(-1)+0\cdot 5+2\cdot(-2) & 1\cdot 0+0\cdot 1+2\cdot 0 & 1\cdot 1+0\cdot 4+0\cdot 1\\ 3\cdot(-1)+5\cdot 1+0\cdot(-2) & 3\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 0 & 3\cdot 1+1\cdot 4+0\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&0&3\\2&1&7\end{pmatrix}.$$

Замечание. Если произведение матриц AB существует, то произведение матриц BA может не существовать. Так в выше приведенном примере $A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 3}$ существует, а произведение $B_{3\times 3}\cdot A_{2\times 3}$ нельзя осуществить, т. е. Оно не существует.

5) Для квадратной матрицы можно ввести операцию *возведения в положительную степень*, $A^k = \underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{k\ \text{раз}}$, где k — натуральное число.

6) *Транспонирование матрицы* — операция перехода от матрицы A к матрице A или A^T, в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка.

Например. $A_{2\times 3}=\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&5&1\end{pmatrix}$. $A^T_{3\times 2}=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\\-3&1\end{pmatrix}$.

Свойства операции транспонирования:

1) $\left(A^T\right)^T=A$;

2) $\left(\lambda A\right)^T=\lambda\cdot A^T$;

3) $(A+B)^T=A^T+B^T$;

4) $(A\cdot B)^T=A^T\cdot B^T$.

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ 2-ГО И 3-ГО ПОРЯДКОВ

Определителем второго порядка называется число, вычисляемое по следующей формуле $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определителем третьего порядка называется число, вычисляемое по следующей формуле $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$

$= a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{11}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21}$.

Например.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot (-1) = 10 + 3 = 13.$$

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Пусть A — квадратная матрица, а $\Delta = | A |$ — ее определитель. Ниже перечислим основные свойства определителя Δ.

1) Если элементы какой-либо строки (столбца) матрицы A равны нулю, то ее определитель равен нулю.

2) Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число λ, то ее определитель умножится на это число.

3) От транспонирования матрицы A ее определитель не меняется, т. е. $| A^T | = | A |$.

4) При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.

5) Если матрица содержит две одинаковые строки, то ее определитель равен 0.

МИНОРЫ, АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ. ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА

При вычислении определителей высоких порядков применяют другие формулы. Введем понятие минора и алгебраического дополнения.

Пусть A — квадратная матрица n-го порядка.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы A называется определитель m — 1-го порядка, полученный из матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A называется минор взятый со знаком $(-1)^{i+j}$.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \tag{1.3}$$

Приведем таблицу знаков алгебраических дополнений квадратной матрицы 3-го порядка: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$.

Для вычисления определителей порядка больше 3 пользуются следующей теоремой.

Теорема Лапласа. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$$\Delta = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \tag{1.4}$$

Для определителей 3-го порядка формулу Лапласа можно записать так:

$$\Delta = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \tag{1.5}$$

Здесь определитель разложен по элементам первой строки.

Например. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 - \ldots$

$\ldots - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 1 - 3 \cdot (-1) \cdot 2 = 3 - 4 - 1 - 2 -+ 1 + 6 = 3.$

Квадратная матрица называется невырожденной, если ее определитель отличен от нуля, т. е. $\Delta = | A | \neq 0$, где $| A |$ — обозначение определителя матрицы A.

Вычисление определителя более высокого порядка можно легко осуществить с помощью встроенной в MS Excel функции МОПРЕД (определитель квадратной матрицы). Достаточно вызвать эту функцию и определить область ячеек квадратной матрицы.

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Обратной матрицей к A называется матрица A^{-1}, произведение которой на матрицу A дает единичную матрицу E.

Теорема. Обратная матрица A существует тогда и только тогда, когда $\Delta = |A| \neq 0$, т. е. A — невырожденная матрица.

Рассмотрим алгоритм нахождения обратной матрицы на примере квадратной матрицы 3-го порядка A.

1) Вычисляем $\Delta = |A|$. Если $\Delta = 0$, то обратная матрица A^{-1} не существует, если $\Delta \neq 0$, то A^{-1} существует.

2) Вычисляем алгебраические дополнения элементов матрицы A по формуле (1.3).

3) Составляем присоединенную матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \qquad (1.6)$$

где A — алгебраические дополнения элементов матрицы A.

4) Составляем обратную матрицу по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^* \qquad (1.7)$$

Проверяем правильность вычислений по формулам $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$. На практике достаточно проверить одну из этих формул.

Пример 1.1. Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Вычисляем определитель матрицы A.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 1 + (-1)\cdot(-1)\cdot 0 + 1\cdot(-4)\cdot 2 - 0\cdot 3\cdot 1 - 2\cdot(-1)\cdot 2 - 3\cdot(-4)\cdot(-1) =$$

$18 + 0 - 8 - 0 + 4 - 12 = 2$. $\Delta = 2 \neq 0$, следовательно A^{-1} существует.

2) Вычисляем алгебраические дополнения элементов матрицы A. Сначала первой строки:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}=3\cdot 3-2\cdot(-1)=9+2=11;$$

$$A_{12}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-((-1)\cdot 3-2\cdot 1)=3+2=5;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)-3\cdot 1=1-3=-2.$$

Затем алгебраические дополнения второй строки:

$$A_{21}=\begin{vmatrix}-4 & 0\\ -1 & 3\end{vmatrix}=-((-4)\cdot 3-0\cdot(-1))=12;$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{vmatrix}=2\cdot 3-0\cdot 1=6;$$

$$A_{23}=\begin{vmatrix}2 & -4\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-(2\cdot(-1)-(-4)\cdot 1)=2-4=-2.$$

Теперь вычисляем алгебраические дополнения элементов третьей строки:

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix}=(-4)\cdot 2-0\cdot 3=-8;$$

$$A_{32}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-(2\cdot 2-0\cdot(-1))=-4;$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}2 & -4\\ 1 & -1\end{vmatrix}=2\cdot(-1)-(-4)\cdot 1=-2+4=2.$$

3) Составляем присоединенную матрицу A^* по (3.6)

$$=\begin{pmatrix}11 & 12 & -8\\ 5 & 6 & -4\\ -2 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

4) Находим обратную матрицу A^{-1} по формуле (3.7)

$$\begin{pmatrix}5{,}5 & 6 & -4\\ 2{,}5 & 3 & -2\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Этот же пример можно легко решить, используя встроенную в MS Excel стандартную функцию МОБР (обращение матрицы).

Последовательность действий:

1) Вводим информацию по матрице *A* в ячейки: A1:C3.

2	–4	0
–1	3	2
1	–1	3

2) Выделяем область для значений обратной матрицы A^{-1}:A5:C7.

3) В клетке A5 вводим: =МОБР(A1:C3). Нажимаем клавишу F2 при выделенной области. Затем комбинацию клавишей Ctrl+Shift+Enter, не теряя выделенной области A5:C7. Получаем значения обратной матрицы в выбранной области.

5,5	6	–4
2,%	3	–2
–1	–1	1

Замечание. Если вы случайно попытаетесь изменить ячейки области решений, компьютер может не выпустить вас из задачи, выводя на монитор соответствующее сообщение. Для исправления ситуации достаточно нажать комбинацию клавиш Ctrl+Shift+Enter. Это характерно для всех функций, работающих с массивами информации.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ НА КОМПЬЮТЕРЕ

Система линейных алгебраических уравнений записывается в следующем виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \tag{1.8}$$

где a_{ij} — коэффициенты системы линейных уравнений; b_i — свободные члены системы линейных уравнений; x_j — корни системы линейных уравнений ($i, j = 1 \div n$, n — размерность системы уравнений).

В матричном виде систему линейных алгебраических уравнений (1.8) можно записать следующим образом

$$A \cdot X = B, \tag{1.9}$$

где A — матрица коэффициентов системы линейных уравнений $[a_{ij}]$; B — вектор-столбец свободных членов системы линейных уравнений (b_i); X — вектор-столбец корней системы линейных уравнений (x_j).

Для решения системы уравнений (1.9) достаточно слева умножить на обратную матрицу A^{-1} левую и правую часть системы уравнений.

Иначе говоря, $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow E \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$.

Решение системы линейных алгебраических уравнений (1.8) или (1.9) можно записать в виде

$$X = A^{-1} B. \tag{1.10}$$

Таким образом, чтобы решить систему линейных алгебраических уравнений, достаточно обратную матрицу системы уравнений помножить на вектор-столбец свободных членов и получить корни системы уравнений.

Известно много других методов решения системы линейных алгебраических уравнений: *метод Гаусса*, где система уравнений (1.8) приводится с помощью преобразования строк к треугольному виду, и обратным ходом получаем корни системы; *метод Крамера*, где необходимо вычислять определители системы и определители, полученные заменой столбцов свободными членами, а затем через отношения последних к определителю системы определять корни, и другие методы.

В MS Excel наиболее приемлемым является метод расчета путем умножения обратной матрицы системы на вектор-столбец свободных членов. Для этого используется 2 функции: МОБР (вычисление обратной матрицы) и МУМНОЖ (умножение матриц).

Решение системы линейных уравнений осуществляется в 2 этапа:

1) Выделяется область коэффициентов матрицы системы и в другой области вычисляется с использованием функции МОБР обратная матрица.

2) Выделяется область для корней системы и вызывается функция МУМНОЖ, в которой последовательно выделяются области обратной матрицы и свободных членов для их умножения с использованием клавиш F2 и Ctrl + Shift + Enter аналогично расчету обратной матрицы.

Пример 1.2. Решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_4 - 2x_5 = -34 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 - x_5 = -6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 8 \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Для решения системы уравнений заполним в ячейках A1:E5 матрицу коэффициентов системы. В ячейках F1:F5 коэффициенты свободных членов.

В ячейках A6:E10 определим коэффициенты обратной матрицы (см. пример 1.1).

В ячейках F6:F10 определим корни путем умножения обратной матрицы (A6:E10) на свободные члены (F1:F5).

	A	B	C	D	E	F
1	3	-4	2	1	0	1
2	1	-2	0	-4	-2	-34
3	4	1	-2	6	-1	-6
4	2	2	2	2	-2	8
5	5	-2	3	-10	-1	0
6	**0,005646**	**-0,09245**	**0,142555**	**-0,0367**	**0,115737**	**2**
7	**-0,16725**	**-0,1362**	**0,026817**	**0,087156**	**0,071277**	**5**
8	**0,122089**	**-0,12421**	**-0,16725**	**0,206422**	**0,002823**	**7**
9	**0,069866**	**-0,01905**	**0,014114**	**0,045872**	**-0,06775**	**1**
10	**0,030346**	**-0,37191**	**0,016231**	**-0,19725**	**0,122089**	**11**

Таким образом, корни системы уравнений: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 7$, $x_4 = 1$, $x_5 = 11$.

1.2. ОБОБЩЕННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ БАЛАНСОВЫХ ЗАДАЧ В ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ СФЕРЕ

Имеем совокупность любых объектов природы, поглощающих некоторую материальную (или энергетическую) субстанцию, а также выделяющих другую аналогичную субстанцию. Если для каждого объекта из этой совокупности выполняется закон сохранения вещества (энергии) и объекты взаимосвязаны, то можно объединить их в общую систему. Каждый объект системы будет состоять из входных и выходных параметров, причем количественно сумма входных параметров равна сумме выходных параметров. Представим, что мы имеем две количественных характеристики субстанций: X_i (входящей в i-й объект) и Y_i (выходящей из i-го объекта). Общее количество объектов n. Под *субстанцией* будем понимать *потоки* (финансов, сырья или энергии) входящие и выходящие из объекта. Входящие потоки X_i (аргументы) могут быть заданными (или искомыми в обратной задаче), выходящие потоки Y_i (функции) могут быть искомыми (или заданными в обратной задаче). В любом случае $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i = \sum_{i-1}^{n} \boldsymbol{Y}_i$. Если обозначить все количественные характеристики, приходящие на $\boldsymbol{i}$-й объект с j-х объектов через S_{ij}^{+}, а уходящие с i-го объекта на j-е через S_{ji}^{-}, то можно построить следующую схему связи i-го объекта с остальными $n - 1$ (при значениях $j = 1 \div n$ и $i \neq j$) объектами (рис. 1.1):

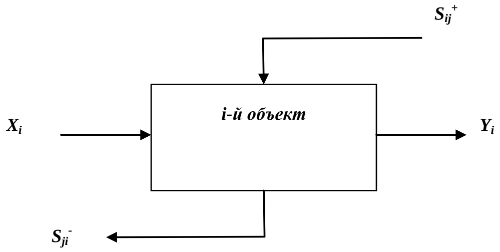


Рисунок 1.1 — Схема балансовых связей *i*-го объекта с *j*-ми объектами выбранной общей системы

Из этой схемы видно, что имеет место следующая система из ***n*** уравнений

$$Y_i + S_{ij}^{-} - S_{ij}^{+} = X_i\,, \tag{1.10}$$

где $i, j = 1 \div n$ ($i \neq j$, j — индексы внутренних сумм).

В общем случае система балансовых уравнений (1.10) может быть нелинейной. Балансовыми уравнениями мы называем уравнения системы (1.10), так как существует баланс между входящими и выходящими потоками объекта.

Мы рассмотрим частный случай, когда система уравнений (1.10) линейна. В этом случае может быть несколько вариантов задания аргументов X и функций Y, в зависимости от поставленной задачи. Если известны аргументы X и неизвестны функции Y — прямая задача. Если, наоборот, известны Y и неизвестны X — обратная задача.

Цель настоящего пособия охарактеризовать методику, реализованную авторами при решении разнообразных задач в финансово-экономической и технической сфере при решении балансовых задач. Все статические балансовые задачи сводятся к решению систем алгебраических уравнений. Баланс можно определять только для симметричного взаимодействия объектов (энергетическое и материальное), то есть, сколько отдано одним объектом, столько получено другими объектами.

В общем виде балансовая система линейных алгебраических уравнений: $AX = B$, где $A = [a_{ij}]$ — квадратная матрица коэффициентов связи j-х объектов с i-ми (i-номер строки, j-номер столбца, $i, j = 1 \div n$, n — количество объектов в системе); $X = (x_i)$ — вектор-столбец неизвестных значений параметров i-го объекта; $B = (b_i)$ — вектор-столбец свободных членов i-го уравнения системы.

Балансовые уравнения при расчете различных балансовых схем имеют свою специфику в зависимости от поставленной задачи, различный вид уравнений, выбор параметров и коэффициентов, необходимость решения прямой или обратной задачи.

Для решения балансовых задач в финансово-экономической сфере взаимодействие между объектами оценивается такими субстанциями как деньги, материальные и энергетические потоки. С использованием балансовых схем в этой сфере успешно решаются следующие задачи:

1. *Межотраслевой баланс в экономике (модель В. Леонтьева)*. Эта модель позволяет выявлять связи между различными секторами экономической системы [4]. Эта модель также представлена системой линейных алгебраических уравнений, отражающих взаимосвязь объектов (секторов экономической системы): $X(E - A) = Y$, где X — вектор объемов продукции отрасли, Y — вектор потребностей рынка, A — матрица внутреннего потребления. Уравнение позволяет по матрице внутреннего потребления (A) и объемам продукции отрасли (X) определить вектор продукции, которая доходит до потребителя. Необходимо планировать такой объем производства X, который обеспечит потребности рынка Y при заданных внутренних затратах A. На принципах линейных балансовых моделей основаны модели равновесных цен и международной торговли.

2. *Распределение финансов между объектами (финансовыми партнерами). Прямая и обратная задачи*.

Пусть имеется n финансовых партнеров. У каждого имеются начальные суммы финансовых средств.

Прямая задача. Каждый из партнеров обязуется передать часть средств от своей суммы (в %) другим партнерам. Найти сколько окажется средств у каждого партнера после взаимной передачи финансовых средств.

Обратная задача. Партнеры знают, сколько средств (в %) они передавали друг другу. Выяснить какие суммы у них были изначально.

3. *Аудит предприятий с использованием балансовых схем*. Известны суммы, переданные и полученные объектами (банками, предприятиями, дочерними предприятиями), коэффициенты (в долях) передачи средств между объектами. Известны основные процентные схемы расходования средств на каждом предприятии (налоги, фонд оплаты труда, основные средства, реклама, командировки и т. д.). В результате расчета балансовой системы уравнений определяем баланс финансовых отношений и суммы, истраченные предприятием и дочерними предприятиями по основным расходным статьям. Это позволяет проводить аудит предприятий сравнением данных по документам и расчетных данных.

4. *Баланс производства продукции на предприятиях, перерабатывающих сельскохозяйственное сырье (молоко, мясо и т.п.)*. Известен годовой баланс переработки сырья, например, молока. Известно количество цехов по переработке

молока, их взаимосвязь (коэффициенты в долях) по сырьевым потокам. Известны рыночные цены на молочную продукцию, производимую в цехах. Задача настройка балансовой системы на существующую схему переработки молока в анализируемом году. Определяем возможную прибыль предприятия от различных инновационных решений, регулируемых коэффициентами взаимосвязи сырьевых потоков.

В технической сфере обычно используются материальные и тепловые балансы. В этой сфере реализованы следующие балансовые схемы:

1. *В технологии переработки нефти для описания процессов фракционирования реализованы покомпонентные и общие материальные и тепловые балансы с учетом фазового равновесия*. Известны сырьевые материальные или тепловые потоки, подаваемые на некоторые объекты (теоретические тарелки) и коэффициенты взаимосвязи (в мольных долях). Определяются покомпонентные составы паровой и жидкой фазы сырья, общие потоки пара и жидкости по тарелкам фракционирующей установки.

2. *В системах водоснабжения и канализации для прогнозирования концентраций содержания вредных веществ, солей строится материальный баланс, учитывающий содержание этих веществ на каждом блоке фильтрации (или блоке упарки стоков).* Задается информация по схеме связи объектов (потоками загрязненной воды), объем перерабатываемой воды в системе с учетом содержания вредных веществ и солей. Решая балансовую систему уравнений, получаем на последнем блоке очистки воду с меньшим содержанием вредных веществ и солей. Оптимизируя схему обвязки блоков, получаем минимальное содержание вредных веществ и солей в воде.

3. *В нефтепереработке для прогнозирования отбора товарных фракций из нефтяного или газоконденсатного сырья используется балансовая схема* [7, 8]. Зная объем и состав сырья, поступающего на переработку, а также зная коэффициенты взаимосвязи (проценты выхода нефтепродуктов, и частичных перетоков полупродуктов на другие установки) для каждого объекта (установки или блока), получаем всю информацию о выходах нефтепродуктов и перетоках в тоннах и процентах.

Во всех рассматриваемых финансово-экономических и технических задачах, использующих системный подход в изучении процессов, явлений с выделением балансовых схем между объектами системы, можно принимать инновационные решения, оптимизируя коэффициенты взаимосвязи объектов, исходя из требуемых значений выбранной функции цели. Учитывая зависимость коэффициентов взаимосвязи объектов от времени, можно проанализировать динамику изменения выходных параметров балансовой системы и определить наилучшие показатели относительно выбранной функции цели или поставленной задачи.

ГЛАВА 2. МОДЕЛИ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА, РАВНОВЕСНЫХ ЦЕН И МЕЖДУНАРОДНОЙ ТОРГОВЛИ

2.1. ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ В. ЛЕОНТЬЕВА МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

Эффективное функционирование экономики предполагает наличие баланса между отдельными отраслями. Каждая отрасль при этом выступает, с одной стороны, как производитель некоторой продукции, а с другой — как потребитель продуктов, вырабатываемых другими отраслями. Для наглядного выражения взаимной связи между отраслями используют таблицы определенного вида, которые называют *таблицами межотраслевого баланса.* Впервые эти таблицы были опубликованы в 1926 году в России. Математическая *модель межотраслевого баланса* (МОБ), допускающая широкие возможности анализа и прогноза, появилась позже (1936 г.) в трудах американского экономиста Василия Леонтьева.

Рассмотрим наиболее простой вариант модели межотраслевого баланса (ее называют *моделью Леонтьева,* или *моделью «затраты — выпуск»).*

Алгебраическая теория анализа модели «затраты — выпуск» сводится к решению СЛАУ, в которых параметрами являются коэффициенты затрат на производство продукции.

Пусть весь производственный сектор народного хозяйства разбит на n «чистых» отраслей. *«Чистая» отрасль* — это условное понятие — некоторая часть народного хозяйства, более или менее цельная (например, энергетика, машиностроение, сельское хозяйство и т.п.).

Пусть x_{ij} — объем продукции отрасли i, расходуемый в отрасли j; X_i — объем производства отрасли i за данный промежуток времени (так называемый *валовой выпуск* продукции i); Y_i — объем потребления продукции отрасли i в непроизводственной сфере *(объем конечного потребления),* включающий создаваемые в хозяйстве запасы, личное потребление граждан, обеспечение общественных потребностей (просвещение, наука, здравоохранение, развитие инфраструктуры и т. д.), поставки на экспорт; Z_j — условно чистая продукция, которая включает оплату труда, чистый доход и амортизацию.

Единицы измерения всех указанных величин могут быть или натуральными (кубометры, тонны, штуки и т.п.), или стоимостными. В зависимости от этого различают *натуральный* и *стоимостной* межотраслевые балансы. Ниже мы будем рассматривать стоимостной баланс. В таблице 2.1 представлена принципиальная схема межотраслевого баланса в стоимостном выражении.

Таблица 2.1 — Принципиальная схема межотраслевого баланса в стоимостном выражении

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	…	n		
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	Y_2	X_2
…	…	…	…	…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nn}	Y_n	X_n
Условно чистая продукция	Z_1	Z_2	...	Z_n	$\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{j=1}^{n} Z_j$	
Валовой продукт	X_1	X_2	...	X_n		$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} X_j$

Рассматривая схему баланса по столбцам, можно заметить, что итог материальных затрат любой потребляющей отрасли и ее условно чистой продукции равен валовой продукции этой отрасли. Данный вывод можно записать в виде соотношения:

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + Z_j, \quad j = 1,\dots,n. \qquad (2.1)$$

Напомним, что величина условно чистой продукции Z_j равна сумме амортизации, оплаты труда и чистого дохода отрасли j. Соотношение (2.1) охватывает систему из n уравнений, отражающих стоимостный состав продукции всех отраслей материальной сферы.

Рассматривая схему МОБ по строкам для каждой производящей отрасли, замечаем, что валовая продукция той или иной отрасли равна сумме материальных затрат потребляющих ее продукцию отраслей и конечной продукции данной отрасли:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i, \quad i = 1,\dots,n. \qquad (2.2)$$

Формула (2.2) описывает систему из n уравнений, которые называются уравнениями распределения продукции отраслей материального производства по направлениям использования. Балансовый характер таблицы выражается в том, что

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} X_j, \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{j=1}^{n} Z_j .$$

Коэффициенты прямых материальных затрат. Основу экономико-математической модели МОБ составляет технологическая матрица коэффициентов прямых затрат $A(a_{ij})$.

Коэффициент прямых материальных затрат a_{ij} — показывает, сколько необходимо единиц продукции отрасли i для производства единицы продукции отрасли j, если учитывать только прямые затраты:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{2.3}$$

Сделаем два важных предположения, необходимых для дальнейшего рассмотрения модели Леонтьева.

1. Сложившуюся технологию производства считаем неизменной. Таким образом, матрица $A = (a_{ij})$ постоянна.

2. Постулируем свойство линейности существующих технологий: для выпуска отраслью у любого объема продукции X_j необходимо затратить продукцию отрасли i в количестве $a_{ij}X_j$, т. е. материальные издержки пропорциональны объему производимой продукции:

$$x_{ij} = a_{ij} X_j. \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в балансовое соотношение (2.3), получаем

$$X_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_i + Y_i. \tag{2.5}$$

или в матричной форме

$$X = AX + Y. \tag{2.6}$$

Вектор X называется вектором *валового выпуска*, вектор Y — *вектором конечного потребления*, а матрица A — *матрицей прямых затрат*. Соотношение (2.6) называется уравнением *линейного межотраслевого баланса*. Вместе с изложенной интерпретацией матрицы A и векторов X и Y это соотношение называют также *моделью Леонтьева*.

С помощью этой модели можно выполнять три вида плановых расчетов:

1) задавая для каждой отрасли величины валовой продукции (X_i), можно определить объемы конечной продукции каждой отрасли (Y_i):

$$Y = (E - A)X; \tag{2.7}$$

2) задавая величины конечной продукции всех отраслей (Y_i), можно определить величины валовой продукции каждой отрасли (X_i):

$$X = (E - A^{-1})Y; \qquad (2.8)$$

3) задавая для ряда отраслей величины валовой продукции, а для всех остальных отраслей — объемы конечной продукции, можно найти величины конечной продукции первых отраслей и объемы валовой продукции вторых.

В формулах (2.7) и (2.8) символ E обозначает единичную матрицу порядка n, а $(E - A)^{-1}$ — матрицу, *обратную* к матрице $(E - A)$. Если определитель матрицы $(E - A)$ не равен нулю, т. е. эта матрица невырожденная, то существует обратная к ней матрица. Обозначим обратную матрицу через $B = (E - A)^{-1}$, тогда систему уравнений в матричной форме (2.8) можно записать в виде $X = BY$.

Элементы матрицы B называются *коэффициентами полных материальных затрат.* Они показывают, сколько всего нужно произвести продукции отрасли i для выпуска в сферу конечного использования единицы продукции отрасли j. Плановые расчеты по модели Леонтьева можно выполнять, если соблюдаются условие продуктивности.

Матрицу $A \geq 0$ будем называть **продуктивной,** если существует такой неотрицательный вектор $X \geq 0$, что

$$X > AX. \qquad (2.9)$$

Очевидно, что условие (2.9) означает существование положительного вектора конечной продукции $Y \geq 0$ для модели межотраслевого баланса (2.6).

Для того чтобы матрица коэффициентов прямых материальных затрате была продуктивной, **необходимо и достаточно,** чтобы выполнялось одно из перечисленных ниже условий:

1) матрица $(E - A)$ неотрицательно обратима, т. е. существует обратная матрица $(E - A)^{-1} > 0$;

2) матричный ряд $\boldsymbol{E + A^2 + A^3 + ... = \sum_{k=1}^{\infty} A^k}$ сходится, причем его сумма равна обратной матрице $(E - A)^{-1}$:

$$B = (E - A)^{-1} = E + A + A^2 + A^3 + \ldots \qquad (2.10)$$

3) наибольшее по модулю *собственное значение* λ матрицы A, т. е. решение характеристического уравнения $| \lambda E - A | = 0$ строго меньше единицы;

4) все главные миноры матрицы $(E - A)$, т. е. определители матриц, образованные элементами первых строк и первых столбцов этой матрицы, порядка от 1 до n, положительны. Более простым способом проверки продуктивности матрицы A является ограничение на величину ее нормы, в данном случае на ве-

личину наибольшей из сумм элементов матрицы A в каждом столбце. Если норма матрицы A строго меньше единицы, то эта матрица продуктивна. Данное условие является достаточным, но не необходимым условием продуктивности, поэтому матрица A может оказаться *продуктивной* и в случае, когда ее норма больше единицы.

Замечание. Обратим внимание на смысл коэффициентов a_{ij} прямых затрат в случае стоимостного (а не натурального) баланса. В этом случае из (2.6) видно, что a_{ij} совпадает со значением x_{ij} при $x_j = 1$ (1 руб.).

Таким образом, a_{ij} есть стоимость продукции отрасли i, вложенной в 1 руб. продукции отрасли j. Отсюда, между прочим, видно, что стоимостной подход по сравнению с натуральным обладает более широкими возможностями, при таком подходе уже необязательно рассматривать «чистые», т. е. однопродуктовые, отрасли. Ведь и в случае многопродуктовых отраслей тоже можно говорить о стоимостном вкладе одной отрасли в выпуск 1 руб. продукции другой отрасли; скажем, о вкладе промышленной сферы в выпуск 1 руб. сельскохозяйственной продукции или о вкладе промышленной группы A (производство предметов потребления). Вместе с тем надо понимать, что планирование исключительно в стоимостных величинах может легко привести к дисбалансу потоков материально-технического снабжения.

Пример 2.1. Таблица 2.2 содержит данные баланса трех отраслей промышленности за некоторый период времени. Требуется найти объем валового выпуска каждого вида продукции, если конечное потребление по отраслям увеличить, соответственно, до 60, 70 и 30 условных денежных единиц.

Таблица 2.2 — Показатели работы 3 отраслей

№ п/п	Отрасль	Потребляющие отрасли			Конечный продукт	Валовый продукт
		1	2	3		
1.	Добыча и переработка углеводородов	5	35	20	40	100
2.	Энергетика	10	10	20	60	100
3.	Машиностроение	20	10	10	10	50

Решение. Выпишем векторы валового выпуска и конечного потребления и матрицу коэффициентов прямых затрат. Согласно формуле (2.6), имеем:

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,35 & 0,40 \\ 0,10 & 0,10 & 0,40 \\ 0,20 & 0,10 & 0,20 \end{pmatrix}.$$

Матрица A удовлетворяет обоим критериям продуктивности. В случае заданного увеличения конечного потребления новый вектор конечного продукта будет иметь

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{60} \\ \boldsymbol{70} \\ \boldsymbol{30} \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Требуется найти новый вектор валового выпуска $\bar{x}_*$, удовлетворяющий соотношениям баланса в предположении, что матрица A не изменяется. В таком случае компоненты $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{\tilde{o}_2}$, $\boldsymbol{\tilde{o}_3}$ неизвестного вектора X^* находятся из системы уравнений, которая в матричной форме имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{X^* = AX^* + Y^*}\text{, или } \boldsymbol{(\mathring{A} - \grave{A})X^* = Y^*}. \tag{2.12}$$

Матрица этой системы

$$\boldsymbol{(\mathring{A} - A)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0,95} & \boldsymbol{-0,35} & \boldsymbol{-0,40} \\ \boldsymbol{-0,10} & \boldsymbol{0,90} & \boldsymbol{-0,40} \\ \boldsymbol{-0,20} & \boldsymbol{-0,10} & \boldsymbol{0,80} \end{pmatrix}.$$

Решение системы линейных уравнений (2.12) при заданном векторе правой части (2.11) (например, методом Гаусса) дает новый вектор X^* как решение уравнений межотраслевого баланса:

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{152,6} \\ \boldsymbol{135,8} \\ \boldsymbol{92,5} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для того чтобы обеспечить заданное увеличение компонент вектора конечного продукта, необходимо увеличить соответствующие валовые выпуски: добычу и переработку углеводородов на 52,2 %, уровень энергетики — на 35,8 % и выпуск машиностроения — на 85 % — по сравнению с исходными величинами, указанными в (2.11).

К числу важнейших аналитических возможностей данного балансового метода относится *определение прямых и полных затрат труда на единицу продукции* и разработка на этой основе балансовых продуктово-трудовых моделей. При этом исходной моделью служит отчетный межпродуктовый баланс в натуральном выражении. В отдельной строке баланса дается распределение затрат живого труда в производстве всех видов продукции. Предполагается, что трудовые затраты выражены в единицах труда одинаковой степени сложности.

Пусть L_j — затраты живого труда в производстве продукта j, а X_j — объем производства этого продукта (валовой выпуск). Тогда прямые затраты труда на единицу продукции вида j *(коэффициент прямой трудоемкости)* можно задать следующей формулой:

$$\boldsymbol{t_j = \frac{L_j}{X_j}; \quad j = 1,...,n.} \tag{2.13}$$

Введем понятие *полных затрат труда* как суммы прямых затрат живого труда и затрат овеществленного труда, перенесенных на продукт через израсходованные средства производства. Если обозначить величину полных затрат труда на единицу продукции вида j через T_j, то произведения вида $a_{ij}T_i$ отражают затраты овеществленного труда, перенесенного на единицу продукта j через средство производства i. Будем предполагать, что коэффициенты прямых материальных затрат a_{ij} выражены в натуральных единицах. Тогда полные трудовые затраты на единицу продукции вида j *(коэффициент полной трудоемкости)* будут равны

$$\boldsymbol{T_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}T_i + t_j; \quad j = 1,...,n.} \tag{2.14}$$

Введем вектор-строку коэффициентов прямой трудоемкости $t = (t_1, t_2, ..., t_n)$ и вектор-строку коэффициентов полной трудоемкости $T = (T_1, T_2, ..., T_n)$.

Тогда с помощью матрицы коэффициентов прямых материальных затрат A (в натуральном выражении) систему (2.14) можно переписать в матричном виде

$$T = TA + t. \tag{2.15}$$

Произведя очевидные матричные преобразования с использованием единичной матрицы E:

$$T - TA = TE - TA = T(E - A) = t,$$

получим следующее соотношение для вектора коэффициентов полной трудоемкости:

$$T = t(E - A)^{-1}. \tag{2.16}$$

Матрица $(E - A)^{-1}$ нам уже знакома, это матрица коэффициентов полных материальных затрат **— *B*,** поэтому равенство (2.16) можно переписать в виде

$$T = tB. \tag{2.17}$$

Обозначим через L величину совокупных затрат живого труда по всем видам продукции, которая с учетом формулы (2.13) будет равна

$$\boldsymbol{L} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{L}_j = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{t}_j \boldsymbol{X}_j = \boldsymbol{tX}. \tag{2.18}$$

Используя соотношения (2.11), (2.17) и (2.18) приходим к следующему равенству:

$$tX = TY. \tag{2.19}$$

Здесь t и T — векторы-строки коэффициентов прямой и полной трудоемкости а X и Y — векторы-столбцы валовой и конечной продукции соответственно.

Соотношение (2.19) представляет собой основное балансовое равенство в теории межотраслевого баланса труда. В данном случае его конкретное экономическое содержание заключается в том, что стоимость конечной продукции, оцененной по полным затратам труда, равна совокупным затратам живого труда. Сопоставляя потребительский эффект различных взаимозаменяемых продуктов с полными трудовыми затратами на их выпуск, можно судить о сравнительной эффективности их производства. Показатели полной трудоемкости выявляют структуру затрат на выпуск различных видов продукции, и прежде всего соотношение между затратами живого и овеществленного труда.

На основе коэффициентов прямой и полной трудоемкости могут быть разработаны межотраслевые и межпродуктовые балансы затрат труда и использования трудовых ресурсов. Схематически эти балансы строятся по общему типу матричных моделей, однако все показатели в них (межотраслевые связи, конечный продукт, условно чистая продукция и др.) выражены в трудовых измерителях.

2.2. МОДЕЛИ РАВНОВЕСНЫХ ЦЕН

Рассмотрим теперь балансовую модель, двойственную к модели Леонтьева — так называемую ***модель равновесных цен***. Пусть, как и прежде, A — матрица прямых затрат, $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ — вектор валового выпуска. Обозначим через $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ — вектор цен, i-я координата которого равна цене единицы продукции i-й отрасли; тогда, например, первая отрасль получит доход, равный p_1, x_1.

Часть своего дохода эта отрасль потратит на закупку продукции у других отраслей. Так, для выпуска единицы продукции ей необходима продукция первой отрасли в объеме a_{11}, второй отрасли в объеме a_{21}, n-й отрасли в объеме a_{n1}

т. д. На покупку этой продукции ею будет затрачена сумма, равная $a_{11}\, p_1 + a_{21}\, p_2 + \ldots + a_{n1}\, p_n$. Следовательно, для выпуска продукции в объеме x_1 первой отрасли необходимо потратить на закупку продукции других отраслей сумму равную $x_1(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{n1}p_n)$. Оставшуюся часть дохода, называемую добавленной стоимостью, мы обозначим V_1 (эта часть дохода идет на выплату зарплаты и налогов, предпринимательскую прибыль и инвестиции).

Таким образом, имеет место следующее равенство:

$$x_1\, p_1 = x_1\,(a_{11}\, p_1 + a_{21}\, p_2 + \ldots + a_{n1}\, p_n) + V_1.$$

Разделив это равенство на x_1 получаем

$$p_1 = (a_{11}\, p_1 + a_{21}\, p_2 + \ldots + a_{n1}\, p_n) + v_1,$$

где $v_1 = \dfrac{V_1}{x_1}$ — норма добавленной стоимости (величина добавленной стоимости на единицу выпускаемой продукции).

Подобным же образом получаем для остальных отраслей

$$p_2 = a_{12}\, p_1 + a_{22}\, p_2 + \ldots + a_{n2}\, p_n + v_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_n = a_{1n}\, p_1 + a_{2n}\, p_2 + \ldots + a_{nn}\, p_n + v_2$$

Найденные равенства могут быть записаны в матричной форме следующим образом:

$$P = A^{\partial}\, P + v, \tag{2.20}$$

где $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ — вектор норм добавленной стоимости.

Как мы видим, полученные уравнения очень похожи на уравнения модели Леонтьева с той лишь разницей, что X заменен на P, Y — на v, A — на A^T.

Модель равновесных цен позволяет, зная величины норм добавленной стоимости, прогнозировать цены на продукцию отраслей. Она также позволяет прогнозировать изменение цен и инфляцию, являющиеся следствием изменения цены в одной из отраслей.

Пример 2.2. Рассмотрим экономическую систему, состоящую из трех отраслей. Назовем их условно: топливно-энергетическая отрасль, промышленность и сельское хозяйство. Пусть

$$A^{\partial} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

– транспонированная матрица прямых затрат, $v = (4;\ 10;\ 4)$;

– вектор норм добавленной стоимости.

Определим равновесные цены. Для этого, как и в модели Леонтьева, воспользуемся формулой (4.21):

$$P = C^T v,$$

где $C^T = (E - A^T)^{-1}$ транспонированная матрица полных затрат.

После необходимых вычислений имеем

$$C^{\text{ò}} = \frac{1}{0,444}\begin{pmatrix} 0,58 & 0,14 & 0,18 \\ 0,28 & 0,68 & 0,24 \\ 0,25 & 0,29 & 0,69 \end{pmatrix}$$

Отсюда получаем, что $P = \text{Ñ}^{\text{ò}} v = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Допустим теперь, что в топливно-энергетической отрасли произойдет увеличение нормы добавленной стоимости на 1,11. Определим равновесные цены в этом случае. Принимая во внимание, что $v = (5,11;\ 10;\ 4)$, находим, что

$$P = \text{Ñ}^{\text{ò}} v = \begin{pmatrix} 11,45 \\ 20,7 \\ 15,625 \end{pmatrix}$$

Таким образом, продукция первой отрасли подорожала на 14,5 %, второй — на 3,5 % третьей отрасли — на 4,17 %. Нетрудно также, зная объемы выпуска, подсчитать вызванную этим повышением инфляцию.

2.3. МОДЕЛЬ МЕЖДУНАРОДНОЙ ТОРГОВЛИ

В модели международной торговли процесс взаимных закупок товаров анализируется с использованием понятий собственного числа и собственного вектора матрицы A. Будем полагать, что бюджеты n стран, которые мы обозначим соответственно x_1, x_2, x_n, расходуются на покупку товаров. Обозначим: x_i — национальный доход страны i; a_{ij} — доля национального дохода страны j, которую она расходует на закупку товаров страны i; p_i — общая выручка страны от внутренней и внешней торговли.

Предположим, что государство расходует весь свой национальный доход на закупку товаров внутри страны и на импорт из других стран. Это означает, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

Матрица A, элементами которой являются коэффициенты a_{ij}, называется *структурной матрицей торговли.* Сумма элементов каждого столбца этой матрицы равна единице.

Предположим, что в течение некоторого фиксированного промежутка времени не меняется структура международной торговли (т. е. структурная матрица торговли остается постоянной), тогда как национальные доходы торгующих стран могут измениться. Требуется определить, какими могут быть национальные доходы, чтобы международная торговля осталась сбалансированной, т. е. чтобы сумма платежей всех государств была равна суммарной выручке от внешней и внутренней торговли.

Для любой страны выручка от внутренней и внешней торговли составит

$$p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n.$$

В сбалансированной системе международной торговли не должно быть дефицита, т. е. у каждой страны выручка от торговли должна быть не меньше ее национального дохода: $p_i \geq x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Последнее неравенство справедливо только в случае, когда $p_i = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, т. е. у всех торгующих стран выручка от внешней и внутренней торговли должна совпадать с национальным доходом. В матричной записи это означает, что имеет место равенство $AX = X$, где A — структурная матрица международной торговли, а X — вектор национальных доходов.

Вектор X является *собственным вектором* структурной матрицы торговли A, а соответствующее собственное значение равно единице. Отсюда следует, что баланс в международной торговле будет достигнут, если собственное значение структурной матрицы международной торговли равно единице, а вектор национальных доходов торгующих стран является собственным вектором, отвечающим этому единичному собственному значению.

Пример 2.3. Найти национальные доходы X_1, X_2, X_3 торгующих стран в сбалансированной системе международной торговли. Структурная матрица торговли трех стран имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Найдем собственный вектор X, отвечающий собственному значению $\lambda = 1$, решив уравнение $(A - \lambda E) = 0$. Система уравнений имеет вид

$$\begin{pmatrix} -2/3 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & -3/4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

С помощью метода Гаусса найдем общее решение этой системы

$$\begin{cases} x_1 = 2{,}25 \\ x_2 = 2{,}5 \\ x_3 = c \end{cases}$$

Из приведенных вычислений видно, что сбалансированность торговли трех стран достигается при векторе национальных доходов X= (2,25c; 2,5c; c), т. е. при соотношении национальных доходов стран 2,25 : 2,5 : 1, или 9 : 10 : 4.

ГЛАВА 3. ФИНАНСОВЫЕ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ БАЛАНСОВЫЕ МОДЕЛИ

3.1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИНАНСОВЫХ ОТНОШЕНИЙ МЕЖДУ ОБЪЕКТАМИ. ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ

Рассмотрим два варианта моделирования финансовых отношений между объектами. В одном случае (вариант 1) распределение финансов происходит от исходных сумм объектов, в другом (вариант 2) — от оборотных сумм. В качестве объектов балансовой системы могут выступать финансовые партнеры, предприятия, отрасли, государственные и негосударственные структуры.

Вариант 1.

Балансовую схему финансовых отношений можно представить на рисунке 3.1 для i-го объекта из n объектов системы.

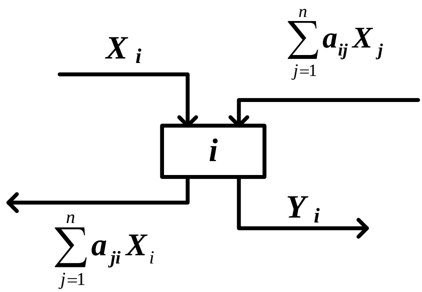


Рисунок 3.1 — Финансовые отношения i-го объекта с остальными n-1 *(вариант 1)*: X_i — начальные суммы (входные параметры); Y_i — конечные суммы, которые останутся у объектов после взаимного кредитования (выходные параметры); a_{ji} — доля от имеющейся исходной суммы i-го объекта, передаваемая j-му объекту $(i,j=1 \div n)$

<u>*Прямая задача*</u>: известны n, a_{ji}, X_i , найти Y_i .

Решение:

$$Y_i = X_i\left(1 - \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\right) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j, (i = 1 \div n) \Rightarrow Y_i$$

<u>*Обратная задача*</u>: известны n, a_{ji}, Y_i , найти X_i.

Решение:

$$X_i\left(1 - \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\right) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = Y_i, (i = 1 \div n) \Rightarrow X_i$$

В *прямой задаче* для решения достаточно матричных операций. В *обратной задаче* решаем систему линейных уравнений.

Вариант 2.

Балансовую схему финансовых отношений можно представить на рисунке 3.2 для ***i***-го объекта из ***n*** объектов системы

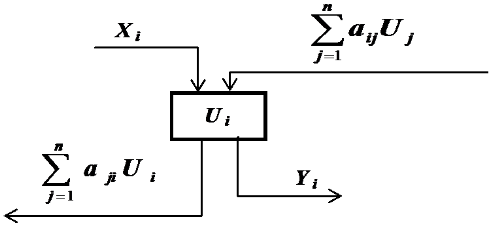


Рисунок 3.2 — Финансовые отношения ***i***-го объекта с остальными $n-1$ *(вариант 2)*: X_i — начальные суммы (входные параметры); Y_i — конечные суммы, которые останутся у объектов после взаимного кредитования (выходные параметры); a_{ji} — доля от имеющейся в обороте i-го объекта суммы U_i, передаваемая j-му объекту $(i,j=1\div n)$

<u>*Прямая задача*</u>: известны n, a_{ji}, X_i, найти U_i, Y_i.

Решение:

$$\boldsymbol{U_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}U_j = X_i (i = 1 \div n) \Rightarrow \quad U_i; \quad Y_i = U_i\left(1 - \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\right), (i = 1 \div n) \quad \Rightarrow \quad Y_i}$$

<u>*Обратная задача*</u>: известны n, a_{ji}, Y_i, найти U_i, X_i.

Решение:

$$\boldsymbol{U_i = Y_i \Big/ \left(1 - \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\right), (i = 1 \div n) \quad \Rightarrow \quad U_i; \quad X_i = U_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}U_j (i = 1 \div n) \Rightarrow \quad X_i}$$

В *прямой задаче* решаем систему линейных уравнений. В *обратной задаче* для решения достаточно матричных операций.

В обоих вариантах, как это видно из рисунков 3.1 и 3.2 соблюдается баланс входящих и выходящих финансовых потоков для каждого i-го объекта и всей системы в целом.

3.2. МОДЕЛИРОВАНИЕ АУДИТА НА ПРЕДПРИЯТИИ

Рассмотрим n предприятий, имеющих финансовые взаимосвязи между собой. Каждое j-е предприятие может переводить часть средств i-му предприятию. Схема перераспределения средств предприятий задается коэффициентами a_{ij}, определяющими долю от имеющейся у предприятия суммы x_j при передаче средств от j-го предприятия i-му. Значения сумм x_i являются искомыми величинами. Сумма полученных инвестиций со стороны в i-е предприятие b_i. Средства, полученные на каждом предприятии, расходуются (в %) по следующим статьям расхода: основные средства, фонд оплаты труда (ФОТ), налоги, реклама, развитие, резервный фонд, хозяйственные расходы, командировки, дивиденды и прочие.

Требуется определить следующие финансовые показатели:

- суммы, переданные предприятиями друг другу;
- общие суммы, израсходованные на предприятиях;
- суммы по статьям расхода.

В общем виде решение поставленной задачи сводится к решению системы линейных уравнений:

$$\boldsymbol{x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \; (i = 1 \div n)} \tag{3.1}$$

или в матричном виде $X - AX = B$.

В качестве примера рассмотрим финансовые связи между головным предприятием (П1) и 4 дочерними предприятиями (П2, П3, П4 и П5). Поэтому в примере количество предприятий и размерность системы уравнений n = 5.

Задаем исходную информацию и решаем систему линейных балансовых уравнений (3.1).

Вводится информация по доле перевода финансовых средств с j-х предприятий на i-е (a_{ij}) и инвестиции, поступающие в данном случае на 1-е предприятие.

Исходные данные:	**Доля перевода от 1:**			$\boldsymbol{a_{ij}}$		$\boldsymbol{b_i}$
Перевод денег с/на	П1	П2	П3	П4	П5	Инвестиции
Предприятие 1	0	0,1	0,1	0,2	0,5	2000000
Предприятие 2	0,1	0	0,1	0,1	0,1	
Предприятие 3	0,1	0,1	0	0,2	0,2	
Предприятие 4	0,1	0,1	0,1	0	0,1	
Предприятие 5	0,1	0,1	0,2	0,3	0	

Вводится информация по расходованию средств на предприятиях в %.

На основе этой информации составляется система линейных алгебраических уравнений (4.1). Корни системы уравнений показывают суммы после взаимного финансирования предприятий.

Исходные данные:	**% расходов по статьям**				
Основные статьи расходов	П1	П2	П3	П4	П5
Основные средства:	**5**	**0**	**5**	**0**	**2**
ФОТ:	**43**	**30**	**36**	**40**	**38**
Налоги:	**35**	**35**	**35**	**35**	**35**
Реклама:	**2**	**1**	**2**	**4**	**3**
Развитие:	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**
Резервный фонд:	**2**	**8**	**3**	**2**	**3**
Хоз. расходы:	**1**	**1**	**4**	**3**	**1**
Командировки:	**2**	**9**	**6**	**8**	**4**
Дивиденды:	**3**	**8**	**4**	**2**	**5**
Прочие:	**2**	**3**	**0**	**1**	**4**
	100	**100**	**100**	**100**	**100**

Коэффицинты системы a_{ij}	1	2	3	4	5	***Св.чл.*** b_i	***Корни*** x_i
1	1	-0,1	-0,1	-0,2	-0,5	2000000	**2392638**
2	-0,1	1	-0,1	-0,1	-0,1	0	**368098**
3	-0,1	-0,1	1	-0,2	-0,2	0	**444785**
4	-0,1	-0,1	-0,1	1	-0,1	0	**368098**
5	-0,1	-0,1	-0,2	-0,3	1	0	**475460**

Результаты расчетов приведены в балансовой схеме, показывающей все финансовые взаимоотношения предприятий.

Приведенная расчетная балансовая схема, характеризует финансовую взаимосвязь (в рублях) по каждому предприятию и по всей системе в целом. Легко убедиться в балансе входных и выходных финансовых потоков.

Выберем для аудита, например, такой показатель как налоги. По результатам отчетности и расчета приведены следующие показатели по налогам:

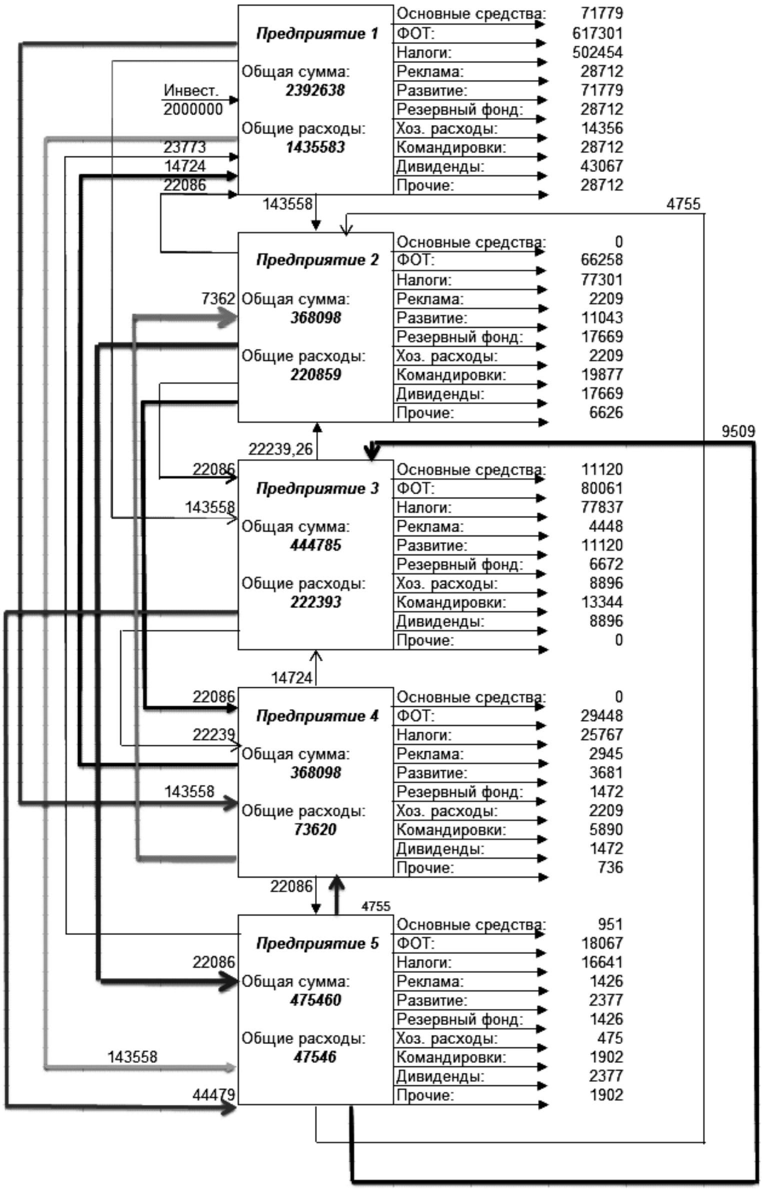
Проверка уплаты налогов, руб.	Предприятия				
	П1	П2	П3	П4	П5
По отчету	502454	70000	72365	25767	16641
По расчету	502454	77301	77837	25767	16641
Разница между расчетными и отчетными данными	0	7301	5472	0	0

Из таблицы видно, что дочернее предприятие П2 недоплатило налогов государству на сумму 7301 руб., а П3 на сумму 4872 рублей.

Аналогично можно проверить все основные финансовые показатели, отраженные в отчетности предприятия.

Решения подобных задач показывает возможности финансового аудита предприятий по различным финансовым показателям с использованием балансовых моделей, получение финансовых оценок и выявление несоответствия между отчетными и расчетными по модели данными с целью предъявления штрафных санкций или исправления финансовой ситуации на предприятии, где нет соответствия основных финансовых результатов с результатами проверки.

Блок-схема финансовой взаимосвязи предприятий (в рублях)



3.3. МОДЕЛИРОВАНИЕ БАЛАНСОВЫХ СХЕМ ПЕРЕРАБОТКИ СЫРЬЯ НА ПРОИЗВОДСТВЕ

Межотраслевой баланс в экономике позволяет выявлять связи между различными секторами экономической системы. Эта модель представлена системой линейных алгебраических уравнений и является частным случаем общей системы балансовых уравнений (3.1). Рассмотрим эту модель как вариант для решения задач по материальному балансу предприятий, перерабатывающих сырье, с учетом стоимостных показателей сырья и продуктов производства, то есть с расчетом чистой прибыли предприятия. Изменение исходных данных в этом варианте (прямая задача в табл.3.1) позволит решать инновационные задачи, находить максимальную прибыль при изменении внутренних и внешних соотношений и значений параметров.

Рассмотрим прямую и обратную задачу для частного случая системы уравнений (2.1) модели Леонтьева. Данные соответствия параметров уравнениям (2.1) приведены в таблице 1.

Таблица 3.1 — Структура количественной взаимосвязи объектов общей модели (3.1) и модели Леонтьева (для прямой и обратной задач)

Количественные характеристики входящих и выходящих потоков для *i*-го объекта из системы уравнений (4.1)		Значения количественных характеристик входящих и выходящих потоков для *i*-го объекта по рассматриваемым вариантам задач	
Наименование	Значение	Для прямой задачи	Для обратной задачи
Поток на *i*-й объект	X_i	b_i	x_i
Потоки с *j*-х объектов на *i*-й объект	S_{ij}^{+}	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j$
Поток с *i*-го объекта	Y_i	x_i	b_i
Потоки с *i*-го объекта на *j*-е объекты	S_{ji}^{-}	0	0

Обратная задача может быть использована для определения исходного сырья при известных коэффициентах взаимосвязи и конечных значениях суммарного переработанного сырья. Решение обратных задач имеет также практический интерес (например, расчет технологических матриц в различных производственных задачах), однако оно сводится к обычному умножению матриц с простыми арифметическими операциями над ними и здесь не рассматривается.

3.4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕРАБОТКИ МОЛОЧНОЙ ПРОДУКЦИИ

Рассмотрим решение прямой задачи на примере предприятия, перерабатываемого сырье, — молочного комбината.

Имеем n цехов молочного комбината, имеющих взаимосвязи материальных потоков между собой. Каждый j-й цех может переводить часть сырья i-му (a_{ij} — доля от 1 от имеющегося у предприятия сырья x_j). Сумма полученного сырья (цельного молока) со стороны i-м цехом за год b_i. В каждом цеху, полученное сырье перерабатывается в продукты (в %) следующим образом: 1 — сыворотка; 2 — молоко 1 %; 3 — молоко 2,5 %; 4 — молоко ВК; 5 — кефир; 6 — крем творожный; 7 — творожная масса; 8 — творог; 9 — сметана; 10 — сыр домашний; 11 — сыр плавленый; 12 — масло нежирное; 13 — масло сливочное; 14 — сухое молоко; 15 — потери.

Определить общую производительность и производительность цехов по продуктам (за год), чистую прибыль предприятия (в рублях за год) при известных ценах на продукты.

Из (3.1) и таблицы 3.1 получим исходную систему линейных уравнений для прямой задачи:

$$\boldsymbol{x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = 1 \div n)} \qquad (3.2)$$

или в матричном виде $X – AX = B$. Приведем расчетные данные для прямой задачи на примере предприятия перерабатывающего сырье.

Решим задачу по материальному балансу молочного комбината, перерабатывающего сырье (цельное молоко), с учетом стоимостных показателей сырья и продуктов производства. Решаем систему линейных балансовых уравнений (3.2).

Исходные данные:	Доля перетока сырья от 1:	***a_{ij}***				***b_i***
Переток сырья с/на	Цех 1	Цех 2	Цех 3	Цех 4	Цех 5	Сырье
Цех 1 (произ-во масла)	0	0,1		0,2	0,5	90000
Цех 2 (сметано-твор-й)	0,2	0	0,1			10000
Цех 3 (сухого молока)			0			5000
Цех 4 (пр-ва сыра)		0,2		0		35000
Цех 5 (диетический)	0,1			0,3	0	20000

Исходные данные:	Цена,р.
Основные виды продуктов	за кг
Сыворотка	5
Молоко 1%	7
Молоко 2,5%	10
Молоко ВК	24
Кефир	14
Крем творожный	65
Творожная масса	90
Творог	70
Сметана	48
Сыр домашний	80
Сыр плавленый	130
Масло нежирное	45
Масло сливочное	100
Сухое молоко	80
Потери	0
Цельное молоко(закуп.цена)	7

Исходные данные:	% продукции от объема				
Основные виды продуктов	Цех 1	Цех 2	Цех 3	Цех 4	Цех 5
Сыворотка	0	19	0	0	0
Молоко 1%	0	30	89	0	0
Молоко 2,5%	0	0	0	40	0
Молоко ВК	0	0	0	0	40
Кефир	0	0	0	0	59
Крем творожный	20	0	0	0	0
Творожная масса	0	0	0	30	0
Творог	0	20	0	0	0
Сметана	0	30	0	0	0
Сыр домашний	64	0	0	0	0
Сыр плавленый	0	0	0	14	0
Масло нежирное	15	0	0	0	0
Масло сливочное	0	0	0	15	0
Сухое молоко	0	0	10	0	0
Потери	1	1	1	1	1
Итого:	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**

Система линейных алгебраических уравнений:

Коэффицинты системы a_{ij}	1	2	3	4	5	***Св.чл. b_i***	***Корни x_i***
1	1	-0,1	0	-0,2	-0,5	90000	124492
2	-0,2	1	-0,1	0	0	10000	35398
3	0	0	1	0	0	5000	5000
4	0	-0,2	0	1	0	35000	42080
5	-0,1	0	0	-0,3	1	20000	45073

Результаты расчета:	Пришло сырья		Переработано		Общее сырье в цеху	
Наименование цеха	тн	%	тн	%	тн	%
Цех 1 (произ-во масла)	90000	56,25	87145	54,47	124492	77,81
Цех 2 (сметано-твор-й)	10000	6,25	24779	15,49	35398	22,12
Цех 3 (сухого молока)	5000	3,13	4500	2,81	5000	3,13
Цех 4 (пр-ва сыра)	35000	21,88	21040	13,15	42080	26,30
Цех 5 (диетический)	20000	12,50	22537	14,09	45073	28,17
Итого:	**160000**	**100,00**	**160000**	**100,00**	**-**	**-**

Результаты расчета:	Перетоки сырья в тоннах				
Переток сырья с/на	Цех 1	Цех 2	Цех 3	Цех 4	Цех 5
Цех 1 (произ-во масла)	0	3540	0	8416	22537
Цех 2 (сметано-твор-й)	24898	0	500	0	0
Цех 3 (сухого молока)	0	0	0	0	0
Цех 4 (пр-ва сыра)	0	7080	0	0	0
Цех 5 (диетический)	12449	0	0	12624	0

Результаты расчета:	Продукты в тоннах				
Основные виды продуктов	Цех 1	Цех 2	Цех 3	Цех 4	Цех 5
Сыворотка	0	4708	0	0	0
Молоко 1%	0	7434	4005	0	0
Молоко 2,5%	0	0	0	8416	0
Молоко ВК	0	0	0	0	9015
Кефир	0	0	0	0	13297
Крем творожный	17429	0	0	0	0
Творожная масса	0	0	0	6312	0
Творог	0	4956	0	0	0
Сметана	0	7434	0	0	0
Сыр домашний	55773	0	0	0	0
Сыр плавленый	0	0	0	2946	0
Масло нежирное	13072	0	0	0	0
Масло сливочное	0	0	0	3156	0
Сухое молоко	0	0	450	0	0
Потери	871	248	45	210	225

Результаты расчета:	Объем доходов от реализации,тыс.р				
Основные виды продуктов	Цех 1	Цех 2	Цех 3	Цех 4	Цех 5
Сыворотка	0	23540	0	0	0
Молоко 1%	0	52036	28035	0	0
Молоко 2,5%	0	0	0	84159	0
Молоко ВК	0	0	0	0	216351
Кефир	0	0	0	0	186152
Крем творожный	1132880	0	0	0	0
Творожная масса	0	0	0	568076	0
Творог	0	346905	0	0	0
Сметана	0	356817	0	0	0
Сыр домашний	4461806	0	0	0	0
Сыр плавленый	0	0	0	382925	0
Масло нежирное	588226	0	0	0	0
Масло сливочное	0	0	0	315598	0
Сухое молоко	0	0	0	0	0
Потери	0	0	0	0	0
Итого общая прибыль:	**6182913**	**779297**	**28035**	**1350758**	**402503**

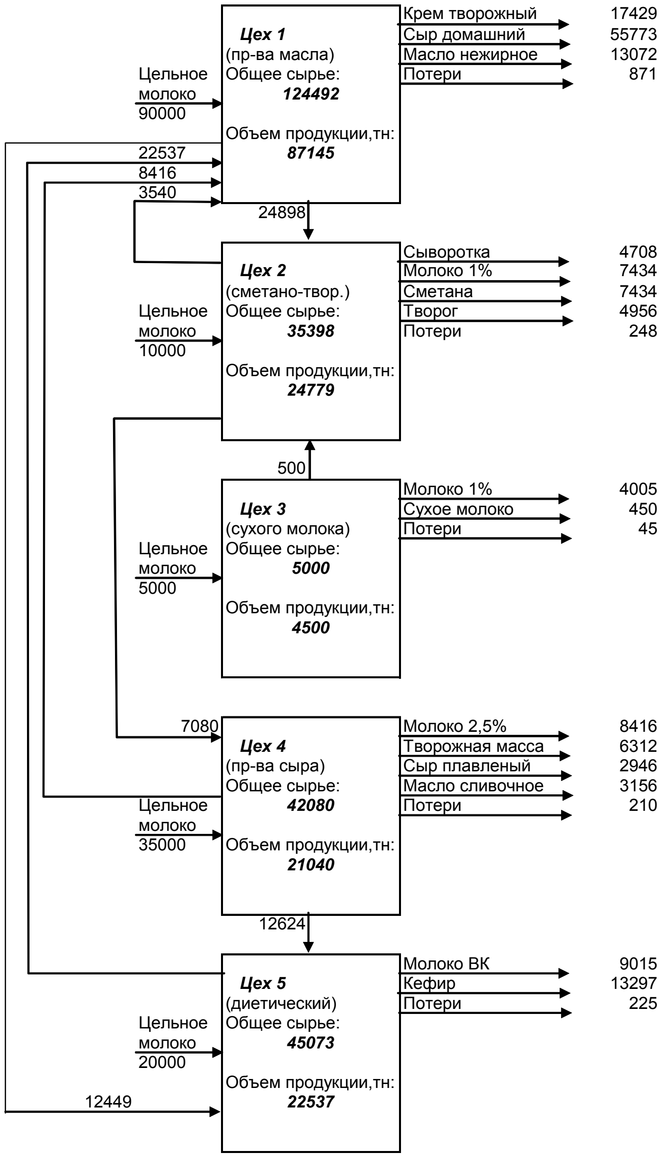


Рисунок 3.3 — Блок-схема материальной взаимосвязи цехов молочного комбината (в т за год)

Всего затрат на сырье, тыс. руб.
1 120 000

Всего доход от реализации продуктов, тыс. руб.
8 743 507

Чистая прибыль, тыс. руб.
7 623 507

На рисунке 3.3 в виде блок-схемы показан материальный баланс молочного комбината по цехам в тысячах тоннах за год.

Осуществив расчет по данным действующего предприятия, можно далее изменять внешние (b_i) и внутренние (a_{ij}) параметры системы уравнений (3.2) и оптимизировать параметр прибыли предприятия, предлагая тем самым инновационные решения по получению максимальной прибыли. При этом должно выполняться условие неизменности общей суммы поступающего в цеха сырья b_i . Обнуляя значения b_i и a_{ij} для i-го цеха, сохраняя предыдущее условие, мы можем оценить изменение прибыли предприятия в случае закрытия этого цеха на ремонт.

Решения приведенного примера показывает возможности оценки прибыли предприятий, перерабатывающих сырье, и, с изменением внутренних взаимосвязей, получение оптимальных решений, вносящих инновации в процесс производства.

3.4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕРАБОТКИ СЫРЬЯ НА НЕФТЕПЕРЕРАБАТЫВАЮЩЕМ ЗАВОДЕ

При рассмотрении различных технологических проектов, реализующих проектирование нефтеперерабатывающих заводов (НПЗ), важным моментом является технико-экономическое обоснование строительства с наиболее выгодными экономическими показателями. Главным показателем эффективности является максимальная прибыль, получаемая при переработке нефтегазоконденсатного сырья (НГКС) на НПЗ. Для этого из заданного НГКС необходимо получить максимальный выход дорогостоящих в настоящее время нефтепродуктов.

Ранее рассматривались различные подходы к решению балансовых задач в зависимости от различных условий и требований, предъявляемых к схемам переработки НГКС на НПЗ. В настоящем учебном пособии приведен универсальный метод, реализующий сетевую модель, то есть модель, учитывающую взаимосвязь всех объектов рассматриваемой балансовой системы переработки сырья на НПЗ с различной поточной схемой.

Суть метода сводится к построению математической модели, связывающей воедино все объекты (установки, блоки и узлы), реализующие процесс переработки НГКС на НПЗ. В основе лежит статическая модель, описываемая системой алгебраических линейных уравнений:

$$\begin{cases} (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \ldots - a_{1N}x_N = b_1 \\ -a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 - a_{23}x_3 \ldots - a_{2N}x_N = b_2 \\ \ldots \\ -a_{N1}x_1 - a_{N2}x_2 - a_{N3}x_3 \ldots + (1-a_{NN})x_N = b_N \end{cases} \qquad (3.3)$$

или

$$x_i - \sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j = b_i \ (i = 1 \ (N).$$

где x_i — искомые корни системы уравнений (3.3), соответствующие нагрузкам блоков (установок) НПЗ; b_i — объемы сырья поступающего на блок; a_{ij} — коэффициенты перетоков с j-го блока на i-й; N — количество блоков в рассматриваемой схеме переработки сырья на НПЗ.

Необходимо присвоить каждому блоку свой номер, чтобы можно было задать процентные значения перетоков с одного блока на другой. *Продуктами* считаются боковые отводы с блоков (P_{ik}), не имеющие перетоков на другие блоки, где i — номер блока, k — номер продукта в блоке (k=1÷ $n^P{}_i$; $n^P{}_i$ — количество продуктов в блоке). Они задаются из расчета, что сумма продуктов из одного блока равна 100%. Если нет ни одного продукта в блоке, то эта информация не задается. *Перетоками* считаются боковые отводы с блоков (W_{il}), подаваемые на другие блоки, где i — номер блока, l — номер перетока из блока (l = 1 ÷ $n^W{}_i$; $n^W{}_i$ — количество перетоков из блока). Проценты по потокам, поступающим на другие блоки, задаются из расчета 100 % на все выходные потоки из блока (с перетоками (W_{il}) и без перетоков (P_{ik})). Для каждого блока задаются все возможные перетоки, связывающие с другими блоками (в %). Кроме того задается сырье в тысячах тонн (F_i) на любой i-й блок или несколько блоков в соответствии с заданным номером блока (i = 1 ÷ N). Если принять $\sum_{i=1}^{N} F_i = 100\%$ и задать сырьевые потоки не в тыс. т, а в %, то после расчетов легко перевести результаты выходов товарной продукции в любые весовые единицы, соответствующие заданному объему переработки сырья. Достаточно перемножить проценты выходов товарной продукции на объем перерабатываемого сырья.

Приведем в соответствие формуле (4.1) используемые обозначения:

– объем сырья, поступающего на блок (b_i) соответствует задаваемому сырью (F_i);

– корни системы уравнений (x_i) соответствуют выражению

$$(\sum_{l=1}^{n_i^W} W_{il} + \sum_{k=1}^{n_i^P} P_{ik});$$

– приходящие на i-й блок перетоки с j-х блоков $\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j$, соответствуют сумме перетоков W с j-х блоков, приходящих на i-й блок.

Уравнение общего баланса имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{N} F_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n_i^P} P_{ik} \tag{4.25}$$

На рисунке 3.4 представлена общая схема входящих и выходящих материальных потоков для i-го блока, входящего в схему переработки на НПЗ.

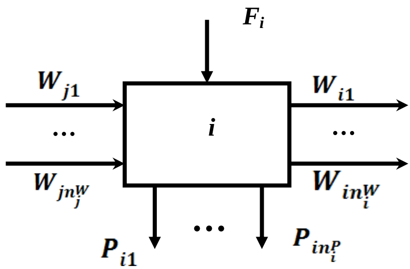


Рисунок 3.4 — Материальный баланс ***i***-го блока переработки сырья на НПЗ

В таблице 1 приведено описание основных материальных связей установок (блоков) с входящими (F), перетекаемыми (W) и продуктовыми (P) потоками, которые участвуют в структурной блок-схеме переработки сырья любого НПЗ (рис. 3.4).

Таким образом, задав количество блоков в схеме переработки сырья на НПЗ и выбрав эти блоки, задав соответствующие объемы сырья, подаваемого в блоки (в тысячах тонн), задав процентные соотношения между потоками, связывающими блоки, а также проценты продуктов из каждого блока — получим общий и поблочный материальный баланс в тысячах тонн в год по всей схеме переработки сырья. По этим данным происходит настройка на существующую структурную схему переработки сырья на действующем НПЗ, например, за предыдущий год. Если по основным результатам получения товарной продукции на НПЗ — процентам выхода и объемам переработки наблюдается совпадение, то можно от этой схемы, изменяя сырье, коэффициенты перетоков, переходить к решению поставленной задачи, то есть оптимизировать нагрузки установок, отбор светлых нефтепродуктов и глубину переработки. Делать прогнозы по объемам выпускаемой продукции при увеличении нагрузок на установки или анализировать возможность изменения сырья, заменяя смесями в различных соотношениях НГКС и т.п. Кроме того, если задать рыночные цены на сырье и нефтепродукты, можно проанализировать целесообразность принятия той или иной схемы переработки сырья на НПЗ. Решение поставленной задачи реализовано в виде программы в среде программирования MS Excel 2007 с использованием языка VBA в операционной системе Windows версии XP SP3 и выше.

Приведем пример выбора наиболее эффективного проекта с результатами расчета по разработанной программе.

Рассмотрим 3 предлагаемых технологических проекта переработки НГКС на НПЗ по двум схемам. Для 1 и 2 проекта введем следующие обозначения для установок и блоков переработки сырья: 1.АТ — установка атмосферной перегонки сырья; 2.КР - установка каталитического риформинга; 3.УРС4 — узел разделения C_4 (бутан-бутеленовой фракции); 4.ГО — установка гидрообессеривания; 5.КК — установка каталитического крекинга; 6.ВП — установка вакуумной перегонки; 7.ВБ — установка висбрекинга. Для 3 проекта добавляются: 3.УПВ — установка получения водорода; вместо 5.КК используется 5.ГК — установка гидрокрекинга; 8.УРГ — узел распределения газов; 9.УРС4 — узел распределения C_4. Исходя из выбранных схем, размерность системы уравнений (4.24) для проектов 1 и 2 равна 7, для 3 проекта — 9.

Схема 1 первого и второго проектов приведена на рис.3.5.

Схема 2 третьего проекта приведена на рис.3.6.

Приведенная в схемах информация использовалась для расчета основных показателей переработки сырья по трем рассматриваемым проектам. Объем переработки сырья во всех трех проектах взят 8000 тыс. тонн в год. В качестве цен на сырье и нефтепродукты взяты современные ориентировочные рыночные цены в рублях.

Как видно из таблицы 3.2, для максимального выхода бензинов наиболее эффективна схема по проекту 1, для максимального выхода газойля — схема 3.

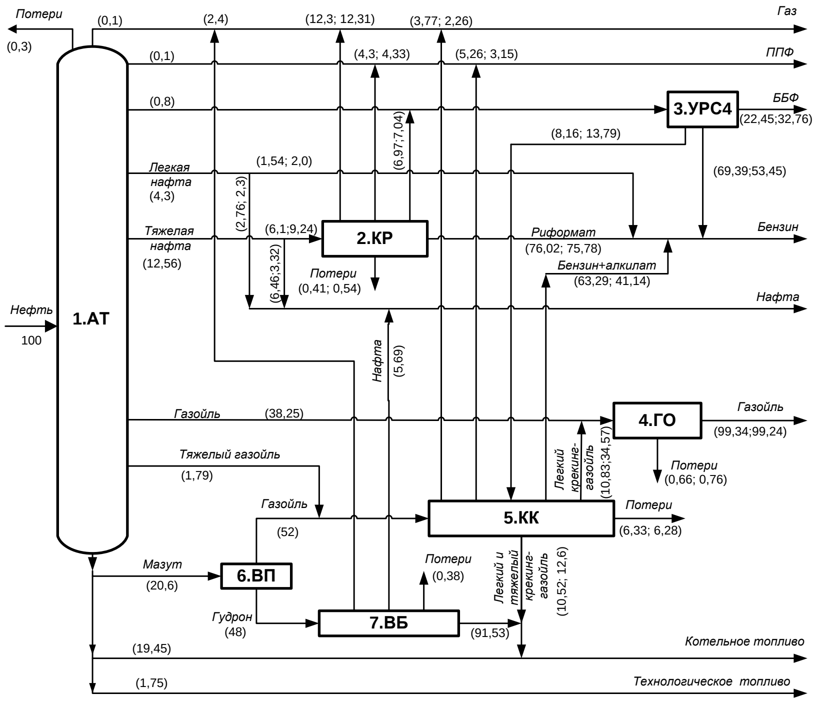


Рисунок 3.5 — Схема 1 переработки сырья с использованием установки каталитического крекинга (КК): в скобках через точку с запятой указаны отличающиеся % выходов с установок для 1 и 2 проектов, соответственно; распределение выходов считается от 100% поступающих на блок потоков

В таблице 3.3 приведен анализ эффективности по прибыли (без учета капитальных, эксплуатационных и энергетических затрат). Эти показатели для 1-го и 2-го проектов отличаются незначительно. Для третьего проекта они отличаются за счет использования гидрокрекинга и установки получения водорода вместо установки каталитического крекинга. Но эти различия, если учесть все затраты, составляют не более 10 % при расчете чистой прибыли. Сравнение проектов по условной прибыли без учета основных затрат показано на диаграмме (рис. 3.7). Из данных таблицы 3.2 и рисунка 3.6 следует, что максимальную прибыль приносит 1-й проект.

Таблица 3.2 — Материальные балансы по трем проектам переработки сырья на НПЗ

Показатели	Проекты					
	1		2		3	
	тыс. т/год	% на сырье	тыс. т/год	% на сырье	тыс. т/год	% на сырье
Поступило:	8000,0	100,00	8000,0	100,00	8000,0	100,00
Получено:						
сжиженного нефтяного газа	125,0	1,56	140,9	1,76	154,9	1,94
пропан-пропиленовой фракции	82,0	1,03	72,0	0,90	56,9	0,71
бутан-бутиленовой фракции	22,0	0,28	38,0	0,48	91,9	1,15
технологического топлива	140,0	1,75	140,0	1,75	164,0	2,05
автобензина	1983,6	24,79	1695,5	21,19	1403,8	17,55
дизельного топлива	3148,3	39,35	3385,5	42,32	3641,2	45,51
котельного топлива	2385,9	29,82	2407,9	30,10	2347,1	29,34
потери	113,2	1,42	120,2	1,50	140,2	1,75
Итого:	8000,0	100,00	8000,0	100,00	8000,0	100,00

Таблица 3.3 — Стоимостные показатели по трем проектам переработки сырья на НПЗ

Стоимостные показатели в млн руб.	Проекты		
	1	2	3
Стоимость перерабатываемой нефти	80000,0	80000,0	80000,0
Стоимость продуктов переработки:			
сжиженного нефтяного газа	1000,1	1127,5	1239,1
пропан-пропиленовой фракции (ППФ)	1230,2	1080,2	854,2
бутан-бутиленовой фракции (ББФ)	462,1	798,3	1930,5
технологического топлива	1820,0	1820,0	2132,0
автобензина	56 085,0	47 074,4	36 948,6
дизельного топлива	44 075,7	47 395,1	50 977,5
котельного топлива	11 929,7	12 039,6	11 734,8
Итого:	116 602,8	111 335,2	105 816,6

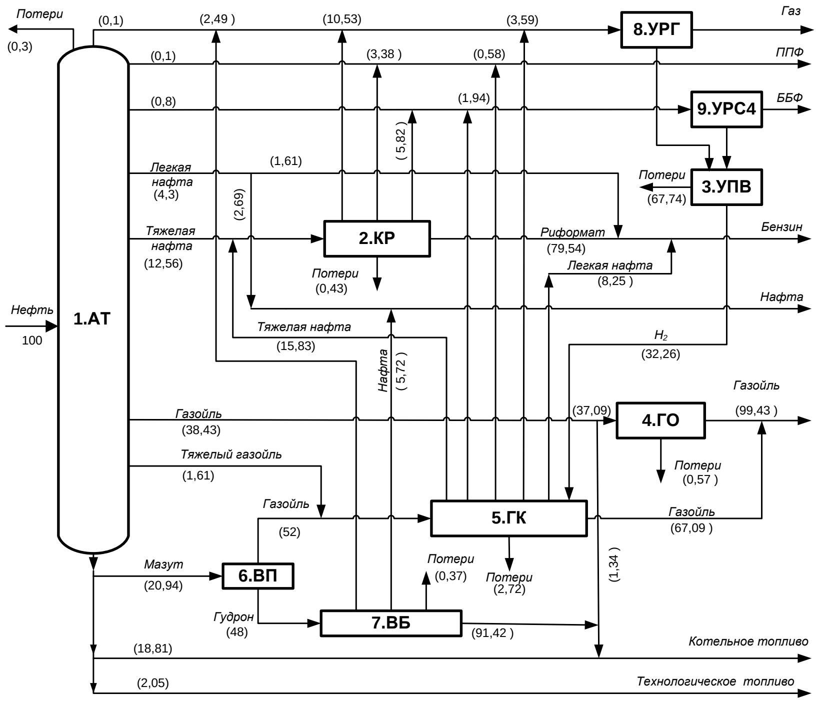


Рисунок 3.6 — Схема 2 переработки сырья с использованием установки гидрокрекинга (ГК): в скобках указаны % выходов с установок для 3 проекта

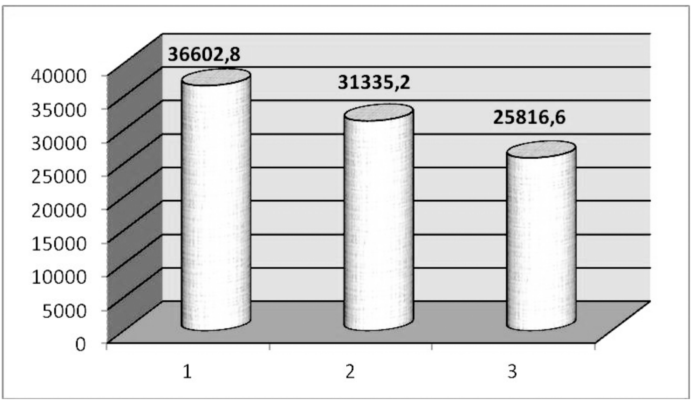


Рисунок 3.7 — Показатели условной прибыли в млн рублей в год по предлагаемым проектам 1, 2, 3

Таким образом, с помощью балансовых моделей можно анализировать различные проекты с учетом рыночной стоимости нефтепродуктов и сырья. Если известны основные капитальные затраты на строительство установок, эксплуатационные затраты, энергетические затраты, то эту информацию можно легко учесть в алгоритме и более точно с учетом экономических показателей анализировать эффективность проектов переработки НГКС на НПЗ с различной поточной схемой разделения и любым числом установок, блоков переработки и узлов разделения нефтепродуктов.

Пример 3.1.

Рассмотрим пример переработки сырья на типовом НПЗ, представленном 11 блоками (узлами) переработки. Сырье на блок фракционирования 1 подается условно в количестве 100 тыс. т. Строим на основании исходных данных СЛАУ (4.1). Решаем через обратную матрицу (МОБР) и умножение матриц (МУМНОЖ) и находим нагрузки по установкам (сырье в блоке) в таблице результатов по блокам.

Исходные данные по схеме связи блоков:

Переток сырья (в % мас.) с блока на блок	Перетоки между установками (в % мас.)											Поступило, в тоннах
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
1			2,56									100000
2	32,06					0,7						
3	38,76			41		1,7						
4								95,73				
5				46,8								
6		54,76										
7		0,7	0,6		0,9			1				
8	20,33					1,9						
9		14,2			76,7	86						
10			94,15									
11	8,253			7,2								

Исходные данные по продуктам и потерям на блоках:

Продукты и потери на блоках, %	Общий объем и выхода продуктов на блоках (в % мас.)										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Газ сухой		10,6	67,29		32,59	85,71		73,39			
Фр. С3-С4		13,5									
ПИФ		15,2									
Рефлюкс+ППФ					63,84						
Фр.62-85		57,8									
Бензин А-76,АИ-80											
Диз. топливо									99,9		
Мазут										99,9	
Сера (техническая)							89				99,9
Кокс сжигаемый				58							
Потери	100	2,9	32,71	42	3,571	14,29	11	26,61	0,1	0,1	0,1
Итого:	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**

Результаты расчета по блокам (в тоннах и %):

Номер блока	Сырье		Продукты		Сырье в блоке	
	тонны	%	тонны	%	тонны	%
1	100000	100	607,333	0,61	101222,178	101,22
2	0	0	9885,041	9,89	32581,593	32,58
3	0	0	1284,241	1,28	47741,319	47,74
4	0	0	1001,000	1,00	20019,998	20,02
5	0	0	2098,736	2,10	9369,359	9,37
6	0	0	1730,664	1,73	17841,894	17,84
7	0	0	807,973	0,81	807,973	0,81
8	0	0	683,855	0,68	20912,983	20,91
9	0	0	27156,914	27,16	27156,914	27,16
10	0	0	44948,452	44,95	44948,452	44,95
11	0	0	9795,791	9,80	9795,791	9,80
Итого:	**100000**	**100**	**100000**	**100**	-	-

Результаты расчета по перетокам между блоками:

Переток сырья (в % мас.) с блока на блок	Перетоки между блоками (в тоннах)										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1		0,000	1222,178	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	32456,700		0,000	0,000	0,000	124,893	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	39229,807	0,000		8208,199	0,000	303,312	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,000	0,000	0,000		0,000	0,000	0,000	20019,998	0,000	0,000	0,000
5	0,000	0,000	0,000	9369,359		0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	0,000	17841,894	0,000	0,000	0,000		0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
7	0,000	228,071	286,448	0,000	84,324	0,000		209,130	0,000	0,000	0,000
8	20573,987	0,000	0,000	0,000	0,000	338,996	0,000		0,000	0,000	0,000
9	0,000	4626,586	0,000	0,000	7186,299	15344,029	0,000	0,000		0,000	0,000
10	0,000	0,000	44948,452	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000		0,000
11	8354,351	0,000	0,000	1441,440	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	

Результаты расчета по выходам отдельных продуктов с блоков (в тоннах):

Переток сырья (в % мас.) с установки на установку	Выхода отдельных продуктов с блоков (в тоннах)										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Газ сухой	0,000	1049,127	864,118	0,000	683,963	1483,426	0,000	501,912	0,000	0,000	0,000
Фр. С3-С4	0,000	1335,845	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
ПИФ	0,000	1498,753	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Рефлюкс+ППФ	0,000	0,000	0,000	0,000	1339,818	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Фр.62-85	0,000	5714,597	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Бензин А-76,АИ-80	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Диз. топливо	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	27129,757	0,000	0,000
Мазут	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	44903,503	0,000
Сера (техническая)	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	719,096	0,000	0,000	0,000	9785,995
Кокс сжигаемый	0,000	0,000	0,000	580,580	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Потери	607,333	286,718	420,124	420,420	74,955	247,238	88,877	181,943	27,157	44,948	9,796
Итого:	**607,333**	**9885,041**	**1284,241**	**1001,000**	**2098,736**	**1730,664**	**807,973**	**683,855**	**27156,914**	**44948,452**	**9795,791**

Результаты расчета по выходам отдельных продуктов с блоков (в %):

Переток сырья (в % мас.) с установки на установку	Выхода отдельных продуктов с блоков (в %)										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Газ сухой	0,00	1,05	0,86	0,00	0,68	1,48	0,00	0,50	0,00	0,00	0,00
Фр. С3-С4	0,00	1,34	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
ПИФ	0,00	1,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Рефлюкс+ППФ	0,00	0,00	0,00	0,00	1,34	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Фр.62-85	0,00	5,71	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Бензин А-76,АИ-80	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Диз. топливо	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	27,13	0,00	0,00
Мазут	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	44,90	0,00
Сера (техническая)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,72	0,00	0,00	0,00	9,79
Кокс сжигаемый	0,00	0,00	0,00	0,58	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Потери	0,61	0,29	0,42	0,42	0,07	0,25	0,09	0,18	0,03	0,04	0,01
Итого:	**0,61**	**9,89**	**1,28**	**1,00**	**2,10**	**1,73**	**0,81**	**0,68**	**27,16**	**44,95**	**9,80**

Блок-схема с расчетными балансовыми значениями представлена на рисунке 3.8.

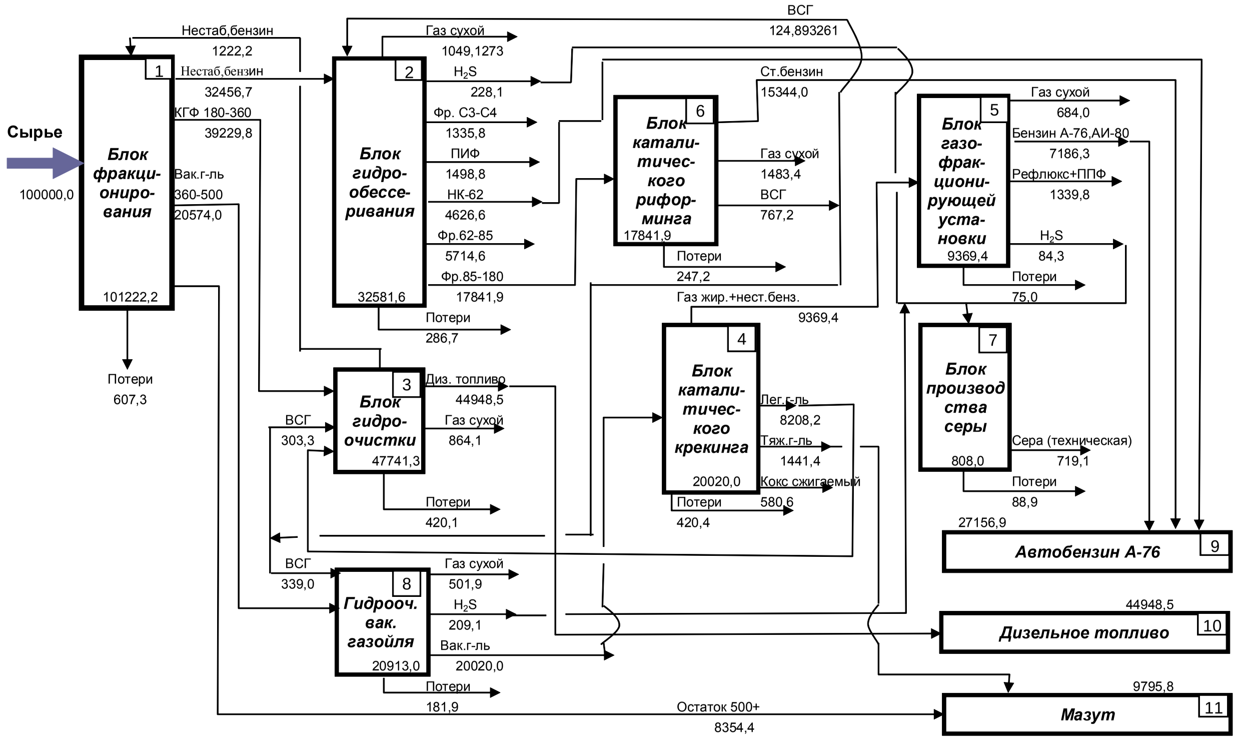


Рисунок 3.8 — Балансовая блок-схема производства товарных нефтепродуктов на типовом НПЗ
(в обозначениях блоков и потоков приведены обозначения привычные для отображения в технологических поточных схемах)

Таким образом, зная показатели взаимосвязи между блоками (установками), можно прогнозировать, а затем и оптимизировать при изменении коэффициентов перетоков нефтепродуктов отбор базовых товарных продуктов переработки нефтяного сырья в % мас и в тыс. т в год, для принятой на НПЗ схемы переработки сырья. А возможность менять коэффициенты перетоков между любыми блоками позволяет настроиться практически на любую схему переработки сырья на НПЗ.

ГЛАВА 4. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ И САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

4.1. ПРАКТИКУМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Даны коэффициенты прямых затрат a_{ij} и конечный продукт Y_i для трехотраслевой экономической системы:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Требуется определить:

1) коэффициенты полных затрат;
2) вектор валового выпуска;
3) межотраслевые поставки продукции;
4) проверить продуктивность матрицы A;
5) заполнить схему межотраслевого баланса.

Решение:

Для решения задачи воспользуемся функциями Excel. На рисунке 4.1 приведены результаты решения задачи по первым трем пунктам.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
1							
2		0,3	0,1	0,4			
3	*A*	0,2	0,5	0			
4		0,3	0,1	0,2			
5							
6		0,7	–0,1	–0,4			
7	*E – A*	–0,2	0,5	0			
8		–0,3	–0,1	0,8			
9	1)						
10		2,040816	0,612245	1,020408163			200
11	*B*	0,816327	2,2448$8	0,408163265	*Y*		100
12		0,867347	0,510204	1,683673469			300
13							
14	2)						
15		775,5102					
16	*X*	510,2041					
17		729,5918					
18							
19	3)						
20		232,6531	51,02041	291,8367347			
21	*X*	155,102	255,102	0			
22		232,6531	51,02041	145,9183673			

Рисунок 4.1 — Фрагмент расчета в MS Excel первых трех пунктов

1. Вычислим матрицу коэффициентов полных затрат $B = (E - A)^{-1}$.

В работе [2] подробно рассмотрено выполнение матричных операций в Excel

Для вычисления обратной матрицы необходимо:

- выделить диапазон ячеек для размещения обратной матрицы;
- выбрать функцию МОБР в категории Математические;
- ввести диапазон ячеек, где содержится матрица $E - A$;
- нажать клавиши CTRL+SHIFT+ENTER.

В ячейки B6:D8 запишем элементы матрицы $E - A$. Массив $E - A$ задан как диапазон ячеек. Выделим диапазон B10:D12 для размещения обратной матрицы $B - (E - A)^{-1}$ и введем формулу для вычислений МОБР (B6:D8). Затем следует нажать клавиши CTRL+SHIFT+ENTER.

Все элементы матрицы коэффициентов полных затрат B неотрицательны, следовательно, матрица A продуктивна (это ответ на пункты «а»–«г»).

2. Вычислим вектор валового выпуска X по формуле $X = BY$. Для умножения матриц необходимо:

- выделить диапазон ячеек для размещения результата умножения матриц;
- выбрать функцию МУМНОЖ в категории Математические;
- ввести диапазоны ячеек, где содержатся матрицы B и Y;
- нажать клавиши CTRL+SHIFT+ETER.

В ячейки G10:G12 запишем элементы вектора конечного продукта Y. Выделим диапазон B15:B17 для размещения вектора валового выпуска X, вычисляемого по формуле $X = (E - A)^{-1}\ Y$. Затем вводим формулу для вычислений МУМНОЖ (B10:D12, G10:G12). Далее следует нажать клавиши CTRL+SHIFT+ENTER.

3. Межотраслевые поставки x_{ij} вычисляем по формуле $x_{ij} = a_{ij}X_j$.

4. Заполняем схему МОБ (табл. 4.1).

Таблица 4.1 — Схема МОБ

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	3		
1	232,6	51,0	291,8	200	775,3
2	155,1	255,0	0,0	100	510,1
3	232,6	51,1	145,9	300	729,6
Условно чистая продукция	155,0	153,1	291,9	600	
Валовой продукт	775,3	510,1	729,6		2015

Задача 2.

Пусть в дополнение к исходным данным задачи 1 заданы в некоторых единицах измерения затраты живого труда (трудовые ресурсы) в трех отраслях: $L_1 = 1160$, $L_2 = 460$, $L_3 = 875$. Требуется определить коэффициенты прямой и полной трудоемкости и составить межотраслевой баланс затрат труда.

Решение:

1. Воспользовавшись формулой (2.11) и результатами предыдущей задачи, находим коэффициенты прямой трудоемкости:

$$t_1 = 1160/775{,}3 = 1{,}5;\ t_2 = 460/510{,}1 = 0{,}9;\ t_3 = 875/729{,}6 = 1{,}2.$$

2. По формуле (2.15), где B — это матрица коэффициента полных материальных затрат, найденная в задаче 1, находим коэффициенты полной трудоемкости:

$$\overline{T} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 0{,}9 & 1{,}2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2{,}041 & 0{,}612 & 1{,}020 \\ 0{,}816 & 2{,}245 & 0{,}408 \\ 0{,}867 & 0{,}510 & 1{,}684 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}84 & 3{,}55 & 3{,}92 \end{pmatrix}.$$

3. Умножая строки 1–3 первого и второго квадрантов межотраслевого материального баланса, построенного по данным задачи 1, на соответствующие коэффициенты прямой трудоемкости, получаем схему межотраслевого баланса труда (в трудовых измерителях) (табл. 4.7).

Таблица 4.7 — Межотраслевой баланс затрат труда

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				
	Межотраслевые затраты овеществленного труда			Затраты труда на конечную продукцию	Затраты труда в отраслях (трудовые ресурсы)
	1	2	3		
1	348,9	76,5	437,7	300,0	1163,0
2	139,6	229,5	0,0	90,0	459,1
3	279,1	61,2	175,1	360,0	875,5

Задача 3.

Рассматривается трехотраслевой МОБ. Известна матрица коэффициентов прямых материальных затрат и задан вектор конечного продукта:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}0 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ \mathbf{0{,}1} & \mathbf{0{,}0} & \mathbf{0{,}2} \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} \mathbf{100} \\ \mathbf{200} \\ \mathbf{300} \end{pmatrix}.$$

Определить валовое производство X, обеспечивающее заданный конечный продукт.

Решение:

Для ответа на поставленный вопрос необходимо составить и решить систему линейных уравнений $(E-A)X=Y$.

$$E-A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0{,}3&0{,}1&0{,}0\\0{,}2&0{,}4&0{,}1\\0{,}1&0{,}0&0{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}7&-0{,}1&0{,}0\\-0{,}2&0{,}6&-0{,}1\\-0{,}1&0{,}0&0{,}8\end{pmatrix}.$$

Получим соответствующую систему уравнений

$$\begin{cases}0{,}7x_1-0{,}1x_2-0{,}0x_3=100\\-0{,}2x_1+0{,}6x_2-0{,}1x_3=200\\-0{,}1x_1-0{,}0x_2+0{,}8x_3=300\end{cases}$$

Решим систему методом Крамера. Если определитель системы $\Delta=|E-A|$ отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое находится по формулам

$$x_j=\frac{\Delta_j}{\Delta},\quad j=1\div n,$$

где Δ_j — определитель, который получается из Δ заменой j-го столбца столбцом свободных членов.

$$\Delta=\begin{vmatrix}0{,}7&-0{,}1&0{,}0\\-0{,}2&0{,}6&-0{,}1\\-0{,}1&0{,}0&0{,}8\end{vmatrix}=0{,}319.\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}100&-0{,}1&0{,}0\\200&0{,}6&-0{,}1\\300&0{,}0&0{,}8\end{vmatrix}=67.$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}0{,}7&100&0{,}0\\-0{,}2&200&-0{,}1\\-0{,}1&300&0{,}8\end{vmatrix}=150.\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}0{,}7&-0{,}1&100\\-0{,}2&0{,}6&200\\-0{,}1&0{,}0&300\end{vmatrix}=128.$$

В MS Excel перепишем в соответствующие ячейки эти матрицы и найдем 4 определителя, используя функцию МОПР.

Применяя формулы Крамера, также в ячейках, получаем решение системы:

$$x_1=\frac{67}{0{,}319}=209,\quad x_2=\frac{150}{0{,}319}=469,\quad x_3=\frac{128}{0{,}319}=400.$$

Задача 4.

Вычислить изменение межотраслевых потоков, если известна матрица коэффициентов полных материальных затрат и задан вектор изменения конечного продукта:

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1{,}23 & 0{,}17 & 0{,}26\\ 0{,}43 & 1{,}25 & 0{,}26\\ 0{,}42 & 0{,}48 & 1{,}16\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{\Delta Y}=\begin{pmatrix}10\\ 0\\ -10\end{pmatrix}.$$

Решение:

Изменение межотраслевых потоков вычисляется по формулам

$$\Delta \boldsymbol{x}_{ij} = \boldsymbol{a}_{ij}\Delta \boldsymbol{x}_j,\ \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} = 1, 2, \ldots, \boldsymbol{n}.$$

Вектор изменения валового производства определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{\Delta X}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\Delta Y}=\begin{pmatrix}1{,}23 & 0{,}17 & 0{,}26\\ 0{,}43 & 1{,}25 & 0{,}26\\ 0{,}42 & 0{,}48 & 1{,}16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\ 0\\ -10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9{,}7\\ 1{,}7\\ -7{,}4\end{pmatrix}.$$

Кроме того, нам необходимо знать матрицу A.

Из формулы $B = (E - A)^{-1}$ следует, что

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1{,}23 & 0{,}17 & 0{,}26\\ 0{,}43 & 1{,}25 & 0{,}26\\ 0{,}42 & 0{,}48 & 1{,}16\end{pmatrix}^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0{,}89 & -0{,}05 & -0{,}19\\ -0{,}26 & 0{,}89 & -0{,}14\\ -0{,}22 & -0{,}35 & 0{,}99\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}11 & 0{,}05 & 0{,}19\\ 0{,}26 & 0{,}11 & 0{,}14\\ 0{,}22 & 0{,}35 & 0{,}01\end{pmatrix}.$$

Все вычисления производятся в MS Excel. Для произведения матриц используется функция МУМНОЖ, для вычисления обратной матрицы МОБР.

Теперь, отвечая на поставленный вопрос, получаем:

$$\boldsymbol{\Delta x_{11}=a_{11}\Delta x_1=0{,}11\cdot 9{,}7=0{,}98;}$$
$$\boldsymbol{\Delta x_{12}=a_{12}\Delta x_2=0{,}05\cdot 1{,}7=0{,}085;}$$
$$\boldsymbol{\Delta x_{13}=a_{13}\Delta x_3=0{,}19\cdot(-7{,}4)=-1{,}48;}$$

и т. д.

Расчеты выполняем в MS Excel, желательно в наглядной форме.

Задача 5.

Вычислить общую потребность в трудовых ресурсах, если известны коэффициенты прямых материальных затрат, коэффициенты прямых затрат труда и задан вектор конечного продукта:

$$A=\begin{pmatrix} 0,0 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,0 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,0 \end{pmatrix},\quad t=\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 200 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Для решения этой задачи нужно воспользоваться формулой

$$L=\sum_{i=1}^{n} t_i x_i=\sum_{j=1}^{n} T_j y_j .$$

Как видим, возможны два способа:

1) вычислить $X = BY$, а затем применить формулу $L = (t, x)$;

2) вычислить коэффициента полных затрат труда $T = B^T t$ и далее $L=(T, Y)$. Но в обоих случаях необходимо сначала вычислить матрицу B.

Решение:

$$E-A=\begin{pmatrix} 1,0 & -0,2 & -0,1 \\ -0,3 & 1,0 & -0,1 \\ -0,2 & -0,1 & 1,0 \end{pmatrix},\quad B=\left(E-A\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 1,10 & 0,25 & 0,13 \\ 0,35 & 1,08 & 0,14 \\ 0,25 & 0,15 & 1,04 \end{pmatrix}.$$

Первый способ:

$$X=BY=\begin{pmatrix} 1,10 & 0,25 & 0,13 \\ 0,35 & 1,08 & 0,14 \\ 0,25 & 0,15 & 1,04 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 200 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 217 \\ 206 \\ 273 \end{pmatrix}.$$

$$L=(t,x)=10\cdot 271+20\cdot 206+30\cdot 273=15020.$$

Второй способ:

$$T=B^{\text{ò}}t=\begin{pmatrix} 1,10 & 0,25 & 0,13 \\ 0,35 & 1,08 & 0,14 \\ 0,25 & 0,15 & 1,04 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 25,5 \\ 28,4 \\ 35,3 \end{pmatrix}.$$

$$L=(T,Y)=25,5\cdot 200+28,4\cdot 100+35,3\cdot 200=15020.$$

Задача 6.

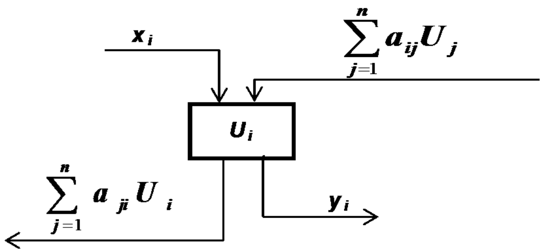
Прямая задача. Рассчитать суммы, оставшиеся после взаимного кредитования 5 финансовых партнеров, имеющих начальные суммы по 100 000 у. е. Коэффициенты долевой передачи приведены в исходных данных первой таблицы. Выполнить на листе 1 в среде MS Excel.

Решение:

N партнеров имеют начальные суммы (x_i), $i = 1 \dots n$ (входные параметры известны.

Имеется схема распределения кредитов.

Каждый i-й партнер кредитует j-го (a_{ji} — доля от 1от имеющейся в обороте суммы U_i, (y_i — суммы, которые останутся у партнеров после взаимного кредитования? (неизвестны).



Следовательно имеет место система уравнений:

$$U_i = \begin{cases} x_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} U_j - \text{приход} \\ y_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ji} U_i - \text{расход} \end{cases}$$

Обратная задача.

Известно n, a_{ij}, y_i. Найти U_i,, y_i.

$$U_i = y_i \Big/ \left(1 - \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\right), (i = 1 \div n) \Rightarrow U_i$$

$$x_i = U_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} U_j (i = 1 \div n) \Rightarrow x_i$$

Исходные данные:	**Доля кредита от 1:** $A=[a_{ij}]$					y_i
Кредиты партнеров с/на	1	2	3	4	5	Кон. сумма
1	0	0,1	0	0,2	0,5	155665,94
2	0,2	0	0,1	0	0	108133,19
3	0	0	0	0	0	90000,00
4	0	0,2	0	0	0	65447,60
5	0,1	0	0	0,3	0	80753,28
Итого:	**0,3**	**0,3**	**0,1**	**0,5**	**0,5**	

Матрица $E-A$

Коэффицинты матрицы	1	2	3	4	5	*кон.зн.* y_i	U_i	*нач.зн.* x_i
1	1	-0,1	0	-0,2	-0,5	155665,94	**222379,91**	**100000,00**
2	-0,2	1	-0,1	0	0	108133,19	**154475,98**	**100000,00**
3	0	0	1	0	0	90000,00	**100000,00**	**100000,00**
4	0	-0,2	0	1	0	65447,60	**130895,20**	**100000,00**
5	-0,1	0	0	-0,3	1	80753,28	**161506,55**	**100000,00**
Итого:	**0,7**	**0,7**	**0,9**	**0,5**	**0,5**	**500000**	**769257,64**	**500000**

A^T

Транспонированая матрица:					
	0	0,2	0	0	0,1
	0,1	0	0	0,2	0
	0	0,1	0	0	0
	0,2	0	0	0	0,3
	0,5	0	0	0	0

Задача 7.

Обратная задача. Рассчитать начальные суммы до взаимного кредитования 5 финансовых партнеров, имеющих конечные суммы (из 2-й таблицы примера 1а). Коэффициенты долевой передачи те же самые.

Решение

Для иллюстрации взаимного кредитования финансовых партнеров можно привести схему кредитования на рисунке 4.1.

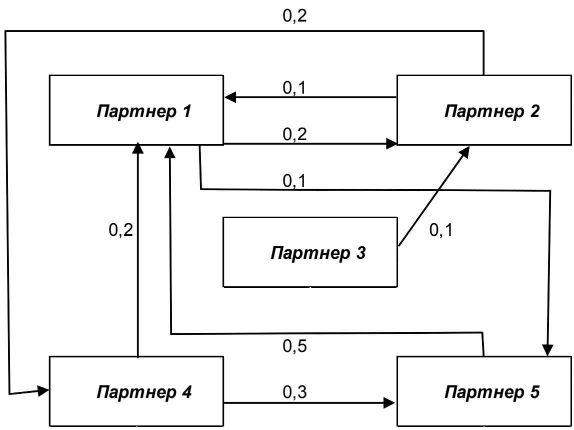


Рисунок 4.1 — Блок-схема беспроцентного кредитования между партнерами (в долях от имеющейся суммы).

4.2. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ И ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

ЗАДАНИЕ 4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ВАЛОВОГО ПРОИЗВОДСТВА

Рассматривается пятиотраслевой МОБ. Известна матрица коэффициентов прямых материальных затрат *A* и задан вектор конечного продукта *Y*.

Определить валовое производство *X*, обеспечивающее заданный конечный продукт.

Варианты:

Дано:	Варианты по порядковому номеру в журнале									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_{11}	0,30	0,55	0,20	0,29	0,08	0,56	0,17	0,24	0,32	0,54
a_{21}	0,10	0,11	0,42	0,16	0,57	0,37	0,48	0,56	0,50	0,49
a_{31}	0,20	0,30	0,57	0,28	0,04	0,04	0,42	0,23	0,58	0,58
a_{41}	0,12	0,02	0,54	0,51	0,54	0,31	0,44	0,15	0,37	0,22
a_{51}	0,05	0,49	0,44	0,08	0,29	0,13	0,26	0,55	0,27	0,17
a_{12}	0,25	0,56	0,39	0,13	0,45	0,24	0,60	0,12	0,58	0,13
a_{22}	0,28	0,54	0,31	0,12	0,13	0,14	0,52	0,10	0,60	0,29
a_{32}	0,36	0,37	0,27	0,06	0,42	0,11	0,22	0,27	0,31	0,03
a_{42}	0,29	0,55	0,48	0,16	0,46	0,06	0,26	0,20	0,08	0,54
a_{52}	0,56	0,34	0,08	0,01	0,32	0,14	0,24	0,16	0,37	0,19
a_{13}	0,37	0,03	0,25	0,42	0,53	0,38	0,43	0,10	0,27	0,16
a_{23}	0,26	0,40	0,03	0,41	0,10	0,30	0,22	0,54	0,00	0,53
a_{33}	0,00	0,12	0,01	0,00	0,05	0,55	0,44	0,59	0,03	0,43
a_{43}	0,26	0,14	0,43	0,45	0,03	0,13	0,17	0,39	0,14	0,06
a_{53}	0,10	0,30	0,14	0,44	0,60	0,60	0,40	0,08	0,27	0,48
a_{14}	0,32	0,47	0,07	0,20	0,09	0,34	0,58	0,20	0,52	0,27
a_{24}	0,27	0,24	0,35	0,28	0,36	0,25	0,15	0,30	0,54	0,24
a_{34}	0,09	0,17	0,03	0,09	0,43	0,50	0,16	0,53	0,34	0,60
a_{44}	0,40	0,33	0,14	0,01	0,55	0,30	0,09	0,34	0,05	0,13
a_{54}	0,50	0,07	0,49	0,48	0,03	0,21	0,09	0,44	0,19	0,17
a_{15}	0,52	0,07	0,53	0,02	0,42	0,20	0,37	0,17	0,02	0,36
a_{25}	0,03	0,42	0,28	0,38	0,04	0,32	0,44	0,30	0,54	0,01
a_{35}	0,20	0,21	0,29	0,10	0,55	0,06	0,45	0,18	0,02	0,38
a_{45}	0,16	0,12	0,19	0,28	0,22	0,07	0,53	0,22	0,33	0,34
a_{55}	0,01	0,26	0,31	0,25	0,34	0,32	0,33	0,19	0,46	0,00
y_1	100	480	20	310	90	80	200	920	650	600
y_2	200	900	10	60	580	710	50	460	180	70
y_3	300	290	250	560	600	260	70	150	980	180
y_4	400	290	880	150	930	360	120	700	670	540
y_5	500	70	720	910	690	120	250	620	590	20

ЗАДАНИЕ 4.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ МЕЖОТРАСЛЕВЫХ ПОТОКОВ

Решить задачу на вычисление изменения межотраслевых потоков, если известна матрица коэффициентов полных материальных затрат (B) и задан вектор изменения конечного продукта (ΔY) по вариантам.

Варианты:

Вариант 1: ΔY =

10	8	1	–1	–5

B =

1,18	0,12	0,35	0,03	0,22
0,13	1,33	0,47	0,31	0,48
0,36	0,35	1,35	0,34	0,35
0,21	0,38	0,50	1,36	0,10
0,41	0,44	0,54	0,08	1,07

Вариант 2: ΔY =

7	–4	–3	10	6

B =

1,43	0,36	0,01	0,10	0,35
0,50	1,21	0,50	0,45	0,57
0,50	0,05	1,59	0,38	0,09
0,37	0,07	0,32	1,09	0,43
0,30	0,21	0,38	0,28	1,36

Вариант 3: ΔY =

–9	–2	5	10	–7

B =

1,51	0,46	0,34	0,05	0,33
0,54	1,44	0,58	0,54	0,16
0,01	0,37	1,46	0,41	0,28
0,44	0,45	0,13	1,36	0,25
0,17	0,09	0,09	0,05	1,23

Вариант 4: ΔY =

9	–9	–5	–8	1

B =

1,06	0,35	0,53	0,52	0,23
0,13	1,12	0,34	0,19	0,09
0,17	0,30	1,32	0,29	0,35
0,28	0,23	0,54	1,56	0,33
0,50	0,59	0,08	0,43	1,11

Вариант 5: ΔY =

–5	–9	–7	–5	0

B =

1,15	0,37	0,57	0,28	0,20
0,47	1,59	0,31	0,16	0,56
0,32	0,57	1,13	0,23	0,04
0,33	0,01	0,23	1,07	0,01
0,60	0,60	0,12	0,27	1,01

Вариант 6: ΔY =

5	–6	8	4	1

B =

1,17	0,39	0,60	0,42	0,35
0,02	1,44	0,07	0,25	0,45
0,34	0,36	1,43	0,06	0,00
0,00	0,04	0,32	1,05	0,50
0,34	0,02	0,50	0,17	1,59

Вариант 7: ΔY =

9	–3	7	10	5

B =

1,29	0,14	0,32	0,18	0,31
0,55	1,25	0,18	0,08	0,50
0,12	0,50	1,59	0,04	0,21
0,15	0,17	0,24	1,19	0,55
0,05	0,60	0,40	0,54	1,10

Вариант 8: ΔY =

6	0	–3	–2	7

B =

1,30	0,45	0,19	0,06	0,59
0,51	1,28	0,12	0,47	0,47
0,56	0,51	1,22	0,31	0,39
0,36	0,18	0,01	1,60	0,12
0,54	0,07	0,07	0,19	1,20

Вариант 9: ΔY =

10	0	–9	3	–9

B =

1,39	0,44	0,10	0,41	0,34
0,00	1,01	0,56	0,16	0,56
0,18	0,12	1,42	0,60	0,00
0,43	0,49	0,37	1,08	0,31
0,12	0,06	0,42	0,54	1,32

Вариант 10: ΔY =

–7	–2	–1	5	–1

B =

1,08	0,26	0,06	0,08	0,43
0,03	1,48	0,26	0,37	0,51
0,03	0,16	1,17	0,58	0,23
0,51	0,49	0,31	1,53	0,47
0,44	0,05	0,03	0,19	1,57

ЗАДАНИЕ 4.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ МЕЖОТРАСЛЕВЫХ ПОТОКОВ

Вычислить общую потребность в трудовых ресурсах (*L*), если известны коэффициенты прямых материальных затрат (*A*), коэффициенты прямых затрат труда (*t*) и задан вектор конечного продукта (*Y*) по вариантам.

Вариант 1: t =

70	13	7	59	70

Y=

290	290	440	400	300

A =

0,0	0,2	0,3	0,4	0,2
0,0	0,0	0,2	0,4	0,3
0,4	0,3	0,0	0,2	0,3
0,3	0,0	0,2	0,0	0,2
0,2	0,0	0,4	0,0	0,0

Вариант 2: t =

58	97	76	93	49

Y =

110	190	370	240	120

A =

0,0	0,4	0,4	0,3	0,3
0,3	0,0	0,4	0,3	0,3
0,1	0,3	0,0	0,0	0,0
0,0	0,2	0,1	0,0	0,0
0,1	0,2	0,3	0,3	0,0

Вариант 3: t=

30	23	55	86	6

Y =

360	270	170	490	310

A =

0,0	0,2	0,4	0,2	0,1
0,3	0,0	0,1	0,2	0,0
0,1	0,4	0,0	0,1	0,3
0,0	0,4	0,4	0,0	0,2
0,3	0,0	0,2	0,1	0,0

Вариант 4: t =

95	100	9	53	54

Y =

30	70	480	330	110

A =

0,0	0,3	0,0	0,1	0,1
0,4	0,0	0,4	0,3	0,3
0,1	0,2	0,0	0,2	0,3
0,4	0,4	0,4	0,0	0,3
0,1	0,3	0,2	0,1	0,0

Вариант 5: t =

98	17	67	8	71

Y =

210	330	260	420	30

A =

0,0	0,1	0,4	0,4	0,2
0,3	0,0	0,3	0,3	0,1
0,2	0,4	0,0	0,3	0,0
0,2	0,3	0,2	0,0	0,2
0,1	0,1	0,1	0,3	0,0

Вариант 6: t =

42	7	89	98	38

Y =

460	330	400	80	50

A =

0,0	0,0	0,3	0,4	0,3
0,4	0,0	0,2	0,3	0,3
0,3	0,0	0,0	0,2	0,1
0,0	0,2	0,3	0,0	0,2
0,0	0,1	0,2	0,4	0,0

Вариант 7: t =

27	23	53	75	36

Y =

40	210	160	240	320

A =

0,0	0,2	0,0	0,1	0,2
0,1	0,0	0,4	0,1	0,3
0,1	0,3	0,0	0,5	0,3
0,3	0,3	0,0	0,0	0,1
0,1	0,1	0,2	0,0	0,0

Вариант 8: t =

20	71	64	74	46

Y =

160	150	290	340	260

A =

0,0	0,3	0,2	0,2	0,3
0,2	0,0	0,3	0,1	0,0
0,0	0,2	0,0	0,2	0,2
0,3	0,4	0,4	0,0	0,1
0,4	0,3	0,2	0,1	0,0

Вариант 9: t =

60	66	35	18	72

Y =

60	230	220	50	490

A =

0,0	0,4	0,3	0,1	0,4
0,1	0,0	0,2	0,1	0,3
0,2	0,2	0,0	0,0	0,3
0,2	0,2	0,3	0,0	0,2
0,0	0,1	0,2	0,1	0,0

Вариант 10: t =

3	99	48	17	24

Y =

290	420	40	360	40

A =

0,0	0,1	0,4	0,4	0,1
0,1	0,0	0,4	0,2	0,3
0,1	0,3	0,0	0,1	0,4
0,3	0,2	0,4	0,0	0,1
0,2	0,4	0,3	0,2	0,0

ЗАДАНИЕ 4.4. ВЗАИМНОЕ ИНВЕСТИРОВАНИЕ ФИНАНСОВЫХ ПАРТНЕРОВ

Решить прямую и обратную задачу взаимного инвестирования пяти финансовых партнеров.

Варианты:

	Нач.сумма	Перетоки финансов a_{ij} (в долях от 1) от j-го партнера i-му												
№	b_i	с 1 на 2	с 1 на 3	с 1 на 4	с 1 на 5	с 2 на 1	с 2 на 3	с 3 на 2	с 3 на 4	с 3 на 5	с 4 на 2	с 4 на 5	с 5 на 1	с 5 на 3
1	50000	0,1	0	0,1	0	0,1	0,1	0,1	0	0,1	0,1	0	0,1	0,1
2	100000	0,1	0,2	0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
3	300000	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
4	500000	0,1	0	0,2	0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0	0,1
5	400000	0	0,1	0,1	0,1	0,1	0	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,3
6	200000	0,1	0,1	0,3	0	0,1	0,1	0,1	0	0,1	0,2	0,1	0,1	0,1
7	250000	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,1
8	40000	0,1	0	0,1	0,1	0	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
9	200000	0,2	0,1	0,3	0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1	0	0,2
10	100000	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1	0,1	0	0,1	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1
11	100000	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1	0,3	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1
12	100000	0,3	0,1	0	0,1	0,2	0,1	0,1	0	0,3	0,1	0,1	0,1	0,1
13	100000	0,1	0,1	0,3	0,1	0,2	0,1	0,1	0	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1
14	100000	0,1	0	0,1	0,1	0	0,1	0,1	0,1	0,3	0,1	0,2	0,1	0
15	50000	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,3	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
16	70000	0,1	0	0,1	0	0,1	0,1	0,1	0	0,1	0,1	0	0,1	0,1
17	200000	0,1	0,2	0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
18	400000	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
19	50000	0,1	0	0,2	0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0	0,1
20	40000	0	0,1	0,1	0,1	0,1	0	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,3

ЗАДАНИЕ 4.5. АУДИТ РАСХОДА СРЕДСТВ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

Проверить финансовые отношения пяти предприятий, учитывая статьи расхода. Схемы финансовых взаимоотношений по инвестициям одинаковы.

Исходные данные:	**Доля перевода от 1:**		**a_{ij}**		
Перевод денег с/на	П1	П2	П3	П4	П5
Предприятие 1	0	0,1		0,2	0,5
Предприятие 2	0,2	0	0,1		
Предприятие 3			0		
Предприятие 4		0,2		0	
Предприятие 5	0,1			0,3	0

Информация о статьях расхода также одинаковая.

Исходные данные:	**% расходов по статьям**				
Основные статьи расходов	П1	П2	П3	П4	П5
Основные средства:	**5**	**0**	**3**	**0**	**2**
ФОТ:	**40**	**30**	**35**	**37**	**45**
Налоги:	**35**	**35**	**35**	**35**	**35**
Реклама:	**2**	**1**	**2**	**2**	**2**
Развитие:	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**
Резервный фонд:	**3**	**10**	**3**	**3**	**3**
Хоз. расходы:	**1**	**1**	**5**	**1**	**1**
Командировки:	**2**	**10**	**7**	**8**	**2**
Дивиденды:	**5**	**8**	**5**	**1**	**5**
Прочие:	**2**	**0**	**0**	**8**	**0**
	100	**100**	**100**	**100**	**100**

Варианты расчета отличаются начальными финансовыми средствами.

Варианты:

Инвестиции в предприятия:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	**2000000**		**2000000**		**2000000**
2	**100000**		**1500000**		**2500000**
3	**1500000**		**3500000**		**1000000**
4	**1500000**		**2000000**	**500000**	
5	**100000**	**1000000**	**1000000**		**2000000**
6	**2500000**		**1500000**	**200000**	
7			**500000**		**1000000**
8			**700000**		**150000**
9	**1100000**	**600000**	**900000**	**400000**	**1000000**
10	**3000000**		**800000**	**200000**	**500000**

П1, П2, … — сокращение в таблицах для Предприятие 1, Предприятие 2, …

4.3. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Поясните принципиальную схему межотраслевого баланса.
2. Как распределяется валовая продукция отраслей материальной сферы производства?
3. Каково различие между промежуточной и конечной продукцией в модели МОБ?
4. Что показывают коэффициенты прямых затрат?
5. Дайте определение коэффициентов полных материальных затрат.
6. При каких условиях модель Леонтьева продуктивна?
7. Раскройте экономическое содержание и укажите способ вычисления показателей прямой и полной трудоемкости продукции.
8. Суть модели равновесных цен.
9. Суть модели международной торговли.
10. Прямая и обратная задачи взаимного кредитования финансовых партнеров.
11. Использование балансовых схем для аудита предприятий.
12. Баланс производства продукции на предприятиях перерабатывающих сырье. Общая балансовая модель.
13. Какие задачи можно решать при использовании балансовых моделей для предприятий, перерабатывающих сырье.
14. Линейные и нелинейные балансовые модели.
15. Какие системы уравнений используются для отслеживания динамики балансовых показателей.
16. Какие функции используются в MS Excel для решения систем линейных алгебраических уравнений?

4.4. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Динамические балансовые системы описываются …

☐ дифференциальными уравнениями
☐ методом черного ящика
☐ отображения явления математической формулой
☐ алгебраическими уравнениями
☐ интегральными уравнениями

2. Система линейных уравнений имеет бесконечное множество решений, если …

☐ число уравнений меньше числа неизвестных
☐ определитель не равен нулю
☐ число уравнений равно числу неизвестных

☐ число уравнений больше числа неизвестных
☐ ранг матрицы не определен

3. При умножении матрицы на вектор столбец справа получается …
☐ вектор столбец
☐ вектор строка
☐ квадратная матрица
☐ прямоугольная матрица
☐ симметричная матрица

4. Матрицы умножаются в том случае если они …
☐ длина строки одной матрицы равна длине столбца другой
☐ прямоугольные
☐ квадратные
☐ если их определители не равны нулю
☐ любые

5. Система линейных уравнений совместна, если
☐ число уравнений равно числу неизвестных
☐ определитель равен нулю
☐ число уравнений меньше числа неизвестных
☐ число уравнений больше числа неизвестных
☐ определитель системы равен нулю

6. Решить обратную задачу Леонтьева модели отраслевого баланса $X - AX = Y$:
☐ $X = (E - A)^{-1}Y$
☐ $X = A^{-1}Y$
☐ $X = Y(E - A)^{-1}$
☐ $X = (E^{-1} - A^{-1})Y$
☐ $X = YA^{-1}$

7. Балансовая система уравнений Леонтьева имеет вид …
☐ $X - AX = B$
☐ $AX = B$
☐ $AX - X = B$
☐ $(A - E)X = B$
☐ $(A - E)^{-1}X = B$

8. Структурной матрицей торговли называется …

☐ матрица *A,* элементами которой являются коэффициенты a_{ij} *(*доля национального дохода страны *j,* которую она расходует на закупку товаров страны *i)*

☐ матрица *A,* отражающая структуру международной торговли

☐ матрица *A,* элементами которой являются коэффициенты a_{ij} *(*доля национального дохода страны *j,* которую она приобретает от товаров страны *i)*

☐ матрица *A,* отражающая структуру финансовых отношений стран

☐ матрица *A,* элементами которой являются коэффициенты a_{ij} *(*доля национального дохода страны *j,* которую она использует в торговле *i*

9. Какой системой уравнений описывается модель Леонтьева?

☐ нелинейными алгебраическими уравнениями

☐ линейными алгебраическими уравнениями

☐ дифференциальными уравнениями

☐ уравнениями математической физики

☐ трансцендентными уравнениями

10. Матрицу *A* называют продуктивной, если …

☐ существует такой ненулевой вектор *X*, что $X < AX$

☐ существует такой неотрицательный вектор *X*, что $X > AX$

☐ существует такой отрицательный вектор *X*, что $X > AX$

☐ существует такой положительный вектор *X*, что $X < AX$

☐ она отражает объемы продукции по отраслям

11. Какие балансы рассматриваются в балансовых моделях Леонтьева?

☐ только натуральные

☐ только стоимостные

☐ натуральные и энергетические

☐ стоимостные и натуральные

☐ материальные и тепловые

12. Что включает объем конечного потребления?

☐ оплату труда, чистый доход, амортизацию

☐ создаваемые запасы, личное потребление граждан, обеспечение общественных потребностей, экспортные поставки

☐ только обеспечение социальных потребностей

☐ обеспечение потребностей коммерческих структур

☐ все проданное потребителям

13. Коэффициент прямых материальных затрат a_{ij} показывает, …

☐ сколько достаточно единиц продукции отрасли i для производства единицы продукции j при учете прямых затрат

☐ сколько пойдет единиц продукции отрасли i для производства такого же количества единиц продукции j при учете прямых затрат

☐ сколько необходимо единиц продукции отрасли i для производства единицы продукции j при учете прямых затрат

☐ коэффициент, учитывающий прямую передачу единиц продукции отрасли i для реализации единицы продукции j в другой отрасли

☐ сколько приходится единиц продукции отрасли i для реализации единицы продукции j при учете прямых затрат

14. Модель равновесных цен это …

☐ модель обратная к модели Леонтьева

☐ модель двойственная к модели Леонтьева

☐ модель, определяющая баланс цен на рынке

☐ модель равновесных отношений в ценовой политике страны

☐ модель равномерного распределения цен на одинаковые товары

15. В модели международной торговли процесс взаимных закупок товаров анализируется с использованием понятий …

☐ дифференцирования взаимных закупок товаров по цене в матрице A

☐ интегрирования взаимных закупок товаров по цене в матрице A

☐ индексации взаимных закупок товаров по цене в матрице A

☐ собственного числа и собственного вектора матрицы A

☐ оптимизации взаимных закупок товаров по цене в матрице A

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Быстров, А.И. Инновационный подход к решению финансово-экономических и технических задач с использованием балансовых схем [Текст] / А.И. Быстров // Механизмы перехода на инновационный путь развития: мат-лы докладов Всерос. науч.-практич. интернет-конф. (23 апреля 2012 года). — Уфа : БИСТ (филиал) ОУП ВПО «АТиСО», 2012. — С. 18–21.
2. Быстров, А.И. Использование метода решения балансовых задач в схемах нефтепереработки для оптимального выбора технологических проектов с наиболее выгодными экономическими показателями [Текст] / А.И. Быстров // Вестник БИСТ (Башкирского института социальных технологий). — 2014. — № 1(22). — С. 27–32.
3. Быстров, А.И. Подготовка и проведение расчетов процессов переработки нефтяного сырья [Текст] / А.И. Быстров, В.Н. Деменков, И.Р. Хайрудинов. — Уфа : Изд-во ГУП ИНХП РБ, 2014. — 288 с.
4. Быстров, А.И. Применение компьютерных математических технологий в дипломном проектировании : учеб. пособие [Текст] / А.И. Быстров, М.Ю. Доломатов. — М.-Уфа : РИО БИСТ, 2007. — 164 с.
5. Вилкас Э.Й. Решения: теория, информация, моделирование [Текст] / Э.Й. Вилкас, Е.З. Майминас. — М. : Радио и связь, 1981. — 328 с.
6. Кундышева, Е.С. Экономико-математическое моделирование : учебник [Текст] / Е.С. Кундышева; под науч. ред. проф. Б.А. Суслакова. — М. : Дашков и К, 2008. — 424 с.
7. Орлова, И.В. Экономико-математическое моделирование. Практическое пособие по решению задач [Текст] / И.В. Орлова. — М.: Вузовский учебник, 2004. — 144 с.
8. Экономико-математические методы и модели [Текст] : учеб. пособие / кол. авторов ; под ред. С.И. Макарова. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : КНОРУС, 2009. — 240 с.

Учебное издание

Быстров Александр Ильич

ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ В ЭКОНОМИКЕ (БАЛАНСОВЫЕ ЗАДАЧИ)

Учебно-методическое пособие
для студентов
финансово-экономических и юридических специальностей

Компьютерный набор: Быстров А.И.

Материалы помещены в авторской редакции

Сдано в набор 25.05.2015. Подписано в печать 19.06.2015.
Бумага офсетная. Печать ризографическая.
Усл.-печ. л. 5,23. Уч.-изд. л. 6,47. Тираж 150 экз. Заказ 161

Башкирский институт социальных технологий (филиал)
Образовательного учреждения профсоюзов высшего образования
«Академия труда и социальных отношений» (г. Уфа)

Отпечатано в полном соответствии с предоставленным оригинал-макетом
в типографии БИСТ (филиала) ОУП ВО «АТиСО»